

WISKUNDE

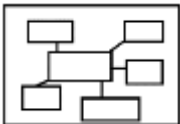





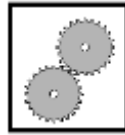

2025 “LAST PUSH”

GRAAD 12

HANDLEIDING VIR ONDERWYSERS EN LEERDERS



IKON BESKRYWING

 <p>BREINKAART</p>	 <p>EKSAMEN RIGLYN</p>	 <p>INHOUD</p>	 <p>AKTIWITEITE</p>
 <p>BIBLIOGRAFIE</p>	 <p>TERMINOLOGIE</p>	 <p>UITGEWERKTE VOORBEELDE</p>	 <p>STAPPE</p>

**INHOUDSOPGAWE****BLADSY**

AFDELING 1: Vraestel 1 – Inhoud en Eksamenriglyne	
1. Algebra, Vergelykings en Ongelykhede	
2. Getalpatrone en Rye	
3. Funksies en Grafieke	
4. Finansies, Groei en Verval	
5. Differensiale Rekening (Kalkulus)	
6. Telbeginsel en Waarskynlikheid	
AFDELING 2: Vraestel 1 – Aktiwiteite	
1. Algebra, Vergelykings en Ongelykhede	
2. Getalpatrone en Rye	
3. Funksies en Grafieke	
4. Finansies, Groei en Verval	
5. Differensiale Rekening (Kalkulus)	
6. Telbeginsel en Waarskynlikheid	
AFDELING 3: Vraestel 2 – Inhoud en Eksamenriglyne	
1. Statistiek en Regressie	
2. Analitiese Meetkunde	
3. Trigonometrie	
4. Euklidiese Meetkunde	
AFDELING 4: Vraestel 2 – Aktiwiteite	
1. Statistiek en Regressie	
2. Analitiese Meetkunde	
3. Trigonometrie	
4. Euklidiese Meetkunde	
AFDELING 5: Inligtingsblad	
AFDELING 6: Bibliografie	
Dbe November 2023 Vraestel 1	
Dbe November 2024 Vraestel 1	
Dbe November 2023 Vraestel 2	
Dbe November 2024 Vraestel 2	

AFDELING 1: Vraestel 1

Inhoud en Eksamenriglyne

ALGEBRA, VERGELYKINGS EN ONGELYKHEDE

Bewerkings met breuke

- Vermenigvuldiging en Deling van breuke

Voorbeeld 1

Vereenvoudig

$$\frac{5}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{2 \times 3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$$

Voorbeeld 2

$$\frac{5}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{2 \times 2} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

- Optelling en Aftrekking van breuke

Voorbeeld 1

Vereenvoudig

$$\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{15}{6} + \frac{4}{6} = \frac{15+4}{6} = \frac{19}{6} = 3 \frac{1}{6}$$

Voorbeeld 2

$$\frac{5}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{15}{6} - \frac{4}{6} = \frac{15-4}{6} = \frac{11}{6} = 1 \frac{5}{6}$$

Exponente en Wortelvorme

Eksponentwette

$(a, b > 0 \text{ en } m, n \in \mathbb{Z})$

Law	Wet	Example	Voorbeeld
$a^m a^n = a^{m+n}$		$2^3 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$	
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$		$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$	
$(ab)^n = a^n b^n$		$(20)^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$		$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$	
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$		$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$	

N.B $a^0 = 1$ $[a \neq 0]$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad [a \neq 0]$$

Wortelvorme

Vereenvoudig uitdrukkings en los vergelykings op deur eksponent-wette vir rasionale eksponente te gebruik, waar:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}; x > 0; q > 0$$

Neem kennis dat:

- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Exponensiale vergelykings:

Die onbekende is in die eksponent, b.v. In die vergelyking:

$$2^x = 8, \text{ die onbekende } x \text{ is in die eksponent}$$

$$\text{N.B. } a^x > 0 \quad [a > 0 \text{ en } a \neq 1]$$

Voorbeeld 1

$$2^x = 8$$

Oplossing

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Voorbeeld 2

$$2^{2x+1} + 15 \cdot 2^x = 8$$

Oplossing

$$2^{2x+1} + 15 \cdot 2^x = 8$$

$$\therefore 2^{2x} \cdot 2^1 + 15 \cdot 2^x = 8$$

$$\therefore 2(2^x)^2 + 15(2^x) - 8 = 0$$

$$\therefore (2 \cdot 2^x - 1)(2^x + 8) = 0$$

$$\therefore 2 \cdot 2^x = 1 \text{ or } 2^x = -8$$

$$\therefore 2^x = \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad \text{geen oplossing}$$

$$\therefore 2^x = 2^{-1}$$

$$\therefore x = -1$$

Alternatiewelik:

$$2^{2x} \cdot 2^1 + 15 \cdot 2^x = 8$$

$$\text{Laat } k = 2^x$$

$$\therefore k^2 = 2^{2x}$$

$$\therefore 2k^2 + 15k - 8 = 0$$

$$\therefore (2k - 1)(k + 8) = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad k = -8$$

$$\therefore 2^x = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad 2^x = -8$$

$$\therefore x = -1 \quad \text{geen oplossing}$$

Vergelykings met rasionale eksponente

Voorbeeld 1

Los op vir x

$$3x^{\frac{2}{5}} - 5x^{\frac{1}{5}} - 2 = 0$$

Oplossing

$$3\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2 - 5x^{\frac{1}{5}} - 2 = 0$$

$$\text{laat } k = x^{\frac{1}{5}}$$

$$3k^2 - 5k - 2 = 0$$

$$(3k + 1)(k - 2) = 0$$

$$k = -\frac{1}{3} \quad \text{of} \quad k = 2$$

$$x^{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right)^5$$

$$x = -\frac{1}{243}$$

Kwadratiese Vergelykings

Oplos van vergelykings van die vorm $ax^2 + bx + c = 0$

- Oplos van kwadratiese vergelykings deur faktoriserings

Voorbeeld

Los op vir x : $x^2 + 5x + 6 = 0$

Oplossing

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x = -2 \text{ of } x = -3$$

- Oplos van kwadratiese vergelykings deur die algemene kwadratiese formule te gebruik.

Algemene kwadratiese formule word gegee deur: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Voorbeeld

Los op vir x :

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

Oplossing

$$a = 1, b = 2, c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{2} \quad \text{of} \quad x = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2}$$

$$x = -1 + \sqrt{6} \quad \text{of} \quad x = -1 - \sqrt{6}$$

$$x = 1,45 \quad \text{of} \quad x = -3,45 \quad [\text{Afgerond tot TWEE desimale plekke}]$$

Vergelykings met Breuke*Voorbeeld 1*Los op vir x

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} + 1 = 0$$

Oplossing

$$\text{Beperkings: } x - 1 \neq 0, \therefore x \neq 1$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} + 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + x - 2 + x - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\therefore (x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ or } x = 1 \text{ But } x \neq 1$$

$$\therefore x = -3$$

Alternatiewelik:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)} + 1 = 0$$

$$\therefore x + 2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = -3$$

*Voorbeeld 2*Los op vir x

$$\frac{2}{4x^2 - 1} + \frac{1}{1 - 2x} = \frac{x}{2x + 1}$$

*Oplossing:***Beperkings:** $x \neq \frac{1}{2}$ en $x \neq -\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{4x^2 - 1} + \frac{1}{1 - 2x} = \frac{x}{2x + 1}$$

$$\therefore \frac{2}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{1}{(2x-1)} = \frac{x}{(2x+1)}$$

$$\therefore 2 - (2x+1) = x(2x-1)$$

$$\therefore 2 - 2x - 1 = 2x^2 - x$$

$$\therefore 0 = 2x^2 + x - 1$$

$$\therefore 0 = (2x-1)(x+1)$$

$$\therefore x \neq \frac{1}{2} \text{ or } x = -1$$

Gebruik van k -metode om vergelykings op te los

Jy mag die k -metode gebruik om vergelykings, met herhaalde uitdrukkings, op te los.

*Voorbeeld 1*Los op vir x

$$\sqrt{x^2 + x + 10} = x^2 + x - 2$$

Oplossing:

$$\sqrt{x^2 + x + 10} = x^2 + x - 2$$

$$\text{Let } k = x^2 + x$$

$$\therefore \sqrt{k+10} = k-2$$

$$\therefore k+10 = k^2 - 4k + 4 \quad \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\therefore 0 = k^2 - 5k - 6$$

$$\therefore 0 = (k-6)(k+1)$$

$$\therefore k = 6 \text{ or } k \neq -1$$

$$\text{But } k \neq -1$$

$$\therefore k = 6$$

$$\therefore x^2 + x = 6$$

$$\therefore x^2 + x - 6 = 0$$

$$\therefore (x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ or } x = 2$$

*Voorbeeld 2*Los op vir a

$$\frac{a^2-a-3}{a^2-a} + a^2 - a + 1 = \frac{5}{a^2-a}$$

Oplossing:

$$\text{Laat: } a^2 - a = k$$

$$\frac{k-3}{k} + k + 1 = \frac{5}{k}$$

$$k - 3 + k^2 + k = 5$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k - 2)(k + 4) = 0$$

$$k = 2 \text{ of } k = -4$$

$$\text{let } k = a^2 - a$$

$$a^2 - a = 2 \text{ of } a^2 - a = -4$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \text{ of } a^2 - a + 4 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0 \text{ of } a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$a = 2 \text{ or } a = -1 \text{ of } a = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

Geen Reële Oplossing

Vergelykings met Wortelvorme

Wanneer ons nie 'n getal kan vereenvoudig en die vierkantswortel (of derdemagswortel, ens) kan weg val nie, dan is dit 'n wortelvorm.

Wanneer daar vierkantwortels in 'n vergelyking is, isoleer die wortelvorm deel en kwadreer beide kante om ontslae te raak van die vierkantswortel.

Jy mag 'n ekstra oplossing bygevoeg het wat nie geldig is nie wanneer jy beide kante kwadreer, daarom is dit belangrik om alle oplossings te toets of hulle die oorspronklike vergelyking bevredig.

Voorbeeld 1

Los op vir x

$$x - \sqrt{7 - 3x} + 1 = 0$$

Oplossing:

$$x - \sqrt{7 - 3x} + 1 = 0$$

$$\therefore x + 1 = \sqrt{7 - 3x}$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 7 - 3x$$

$$\therefore x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\therefore (x + 6)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -6 \text{ or } x = 1$$

Maar, $x \neq -6$

$$\therefore x = 1$$

*Voorbeeld 2*Los op vir x

$$\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{x-2}} = 1$$

Oplossing:

$$\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{x-2}} = 1$$

$$\text{Laat, } k = \sqrt{x-2}$$

$$\therefore k - \frac{6}{k} = 1$$

$$\therefore k^2 - 6 = k$$

$$\therefore k^2 - k - 6 = 0$$

$$\therefore (k-3)(k+2) = 0$$

$$\therefore k = 3 \text{ or } k = -2$$

$$\therefore \sqrt{x-2} = 3 \text{ or } \sqrt{x-2} = -2$$

$$\therefore x-2 = 9 \quad \text{geen reële oplossing}$$

$$\therefore x = 11$$

Alternatiewelik:

$$\sqrt{x-2} - \frac{6}{\sqrt{x-2}} = 1$$

$$\therefore (\sqrt{x-2})^2 - 6 = \sqrt{x-2}$$

$$\therefore x-2-6 = \sqrt{x-2}$$

$$\therefore x-8 = \sqrt{x-2}$$

$$\therefore (x-8)^2 = x-2$$

$$\therefore x^2 - 16x + 64 = x - 2$$

$$\therefore x^2 - 17x + 66 = 0$$

$$\therefore (x-11)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 11 \text{ of } x = 6$$

Maar, $x \neq 6$

$$\therefore x = 11$$

Kwadratiese Ongelykhede

Die vorm:

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{of} \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{of} \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \quad \text{of} \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

Voorbeeld 1

$$(x+1)(x+2) < 20$$

Oplossing

$$(x+1)(x+2) < 20$$

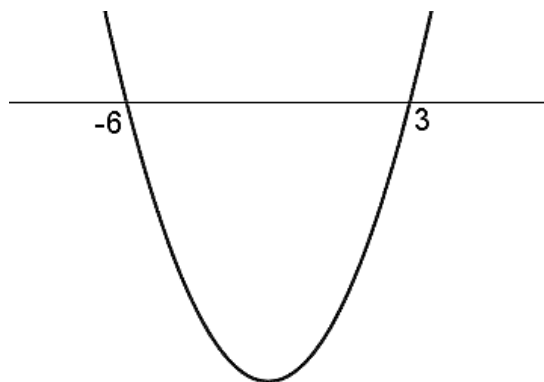
$$\therefore x^2 + 3x + 2 < 20$$

$$\therefore x^2 + 3x - 18 < 0$$

$$\therefore (x+6)(x-3) < 0$$

$$\therefore -6 < x < 3$$

Of interval notasie $\Rightarrow x \in (-6; 3)$



Voorbeeld 2

Los op vir x

$$\frac{x^2}{4} \geq x$$

Oplossing

$$\frac{x^2}{4} \geq x$$

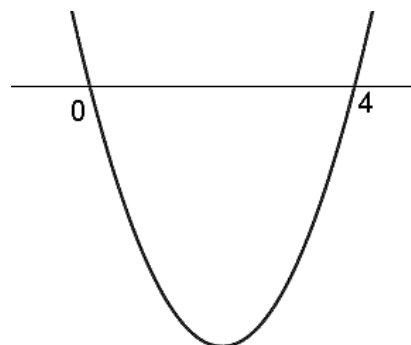
$$\therefore x^2 \geq 4x$$

$$\therefore x^2 - 4x \geq 0$$

$$\therefore x(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 0 \quad \text{or} \quad x \geq 4$$

Of interval notasie $\Rightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$



Gelyktydige Vergelykings

Vergelykings, met twee onbekendes, waarvan een lineêr en die ander kwadratiese is.

Voorbeeld 1

Los op vir x en y :

$$x - 3y + 4 = 0 \quad \text{en} \quad 3 + xy - x^2 = y^2$$

Oplossing

$$x - 3y + 4 = 0$$

$$\therefore x = 3y - 4$$

$$3 + (3y - 4)y - (3y - 4)^2 = y^2$$

$$\therefore 3 + 3y^2 - 4y - (9y^2 - 24y + 16) = y^2$$

$$\therefore 3 + 3y^2 - 4y - 9y^2 + 24y - 16 = y^2$$

$$\therefore 0 = 7y^2 - 20y + 13$$

$$\therefore 0 = (7y - 13)(y - 1)$$

$$\therefore y = \frac{13}{7} \quad \text{of} \quad y = 1$$

$$\therefore x = 3\left(\frac{13}{7}\right) - 4 \quad \text{of} \quad x = 3(1) - 4$$

$$x = \frac{11}{7} \quad \text{of} \quad x = -1$$

Voorbeeld 2

Los op vir x en y :

$$x + y = 5$$

$$xy = 21 - x^2 - y^2$$

Oplossing:

$$x + y = 5$$

$$\therefore y = 5 - x$$

$$\therefore x(5 - x) = 21 - x^2 - (5 - x)^2$$

$$\therefore 5x - x^2 = 21 - x^2 - (25 - 10x + x^2)$$

$$\therefore 5x - x^2 = 21 - x^2 - 25 + 10x - x^2$$

$$\therefore x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\therefore (x - 1)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad \text{or} \quad x = 4$$

$$\therefore y = 4 \quad \text{or} \quad y = 1$$

Aard van die Wortels: Kwadratiese vergelykings

Die aard van die wortels hang af van die waarde van die diskriminant, Δ (delta).

$\Delta = b^2 - 4ac$	Wortels
$\Delta < 0$	Nie-reëel
$\Delta \geq 0$	Reëel
$\Delta > 0$ en <i>volkome vierkant</i>	Reëel, Rasionaal en Ongelyk
$\Delta > 0$ en <i>nie 'n volkome vierkant nie</i>	Reëel, Irrasionaal en Ongelyk
$\Delta = 0$	Reëel, Rasionaal en Gelyk

Aard van die wortels

$\Delta < 0$

Wortels is nie-reëel

Daar is geen x-afsnitte nie

$\Delta = 0$

Wortels is reëel en gelyk

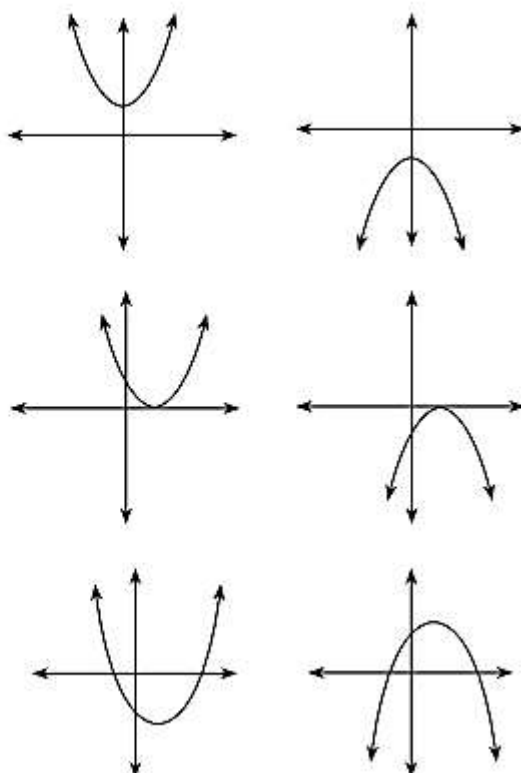
Daar is slegs een x-afsnit
en dit is by die draaipunt
van die grafiek

$\Delta > 0$

Wortels is reëel en ongelyk
(twee wortels)

As Δ 'n volkome vierkant is,
is wortels rasionaal.

As Δ nie 'n volkome
vierkant is nie, is wortels
irrasionaal

Grafieke

Voorbeeld 1

Sonder om die vergelyking $x^2 - 2x - 6 = 0$ op te los, bepaal die aard van die wortels.

Oplossing

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-6)$$

$$\therefore \Delta = 28$$

Reëel, irrasionaal en ongelyk.

Voorbeeld 2

Die wortels van 'n kwadratiese vergelyking is $x = \frac{-2 \pm \sqrt{13 - 2k}}{3}$.

- Vir watter waardes van k sal die wortels reëel wees?
- Bepaal die kleinste positiewe intgrale waarde van k waarvoor die oplossings rasionaal sal wees.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & 13 - 2k \geq 0 \\ & \therefore -2k \geq -13 \\ & \therefore k \leq \frac{13}{2} \\ & \therefore k \leq 6\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b. } k = 2$$

Eksamenriglyne (Algebra, Vergelykings en Ongelykhede)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

ALGEBRA

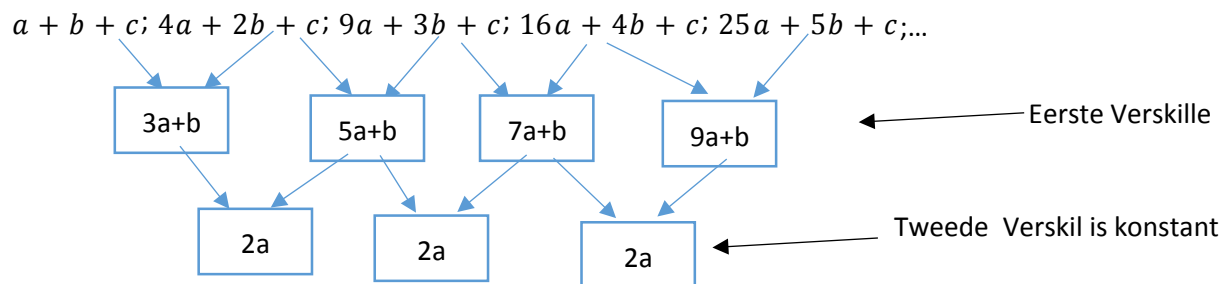
1. Oplos van kwadratiese vergelykings, deur middel van kwadraatsvoltooiing, sal NIE geëksamineer word nie.
2. Oplos van kwadratiese vergelykings, deur gebruik te maak van die substitusie-metode (k -metode), is eksamineerbaar.
3. Vergelykings met wortelvorme, wat lei tot kwadratiese vergelykings, is eksamineerbaar.
4. Oplos van nie-kwadratiese ongelykhede moet in die konteks van funksies gesien word.
5. Aard van die wortels sal intuïtief by die oplossing van kwadratiese vergelykings en in alle voorgeskrewe funksies getoets word.

GETALPATRONE EN RYE

N.B $n \in \mathbb{N}$

Kwadratiese Getalpatrone

Die algemene formule: $T_n = an^2 + bn + c$. Vir enige kwadratiese getalpatroon:



N.B Eerste verskille van 'n kwadratiese getalpatroon vorm 'n rekenkundige ry.

Rekenkundige Rye en Reekse

Algemene term van 'n **Rekenkundige Ry**: $T_n = a + (n - 1)d$

Waar: a – eerste term van die ry

d - gemene/konstante-verskil

n – posisie van 'n term / aantal terme

T_n – n^{de} term / laaste term

Som formule vir 'n **rekenkundige reeks**: $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

OF

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l] \quad \text{waar } l \text{ die laaste term is}$$

Rekenkundige Reeks Bewys:

$$S_n = a + [a + d] + \dots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d] \dots (1)$$

Herskryf vergelyking (1) in omgekeerde volgorde:

$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \dots + [a + d] + a \dots (2)$$

Deur vergelyking (1) en vergelyking (2) op te tel

$$2S_n = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \dots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]$$

$$2S_n = n \times [2a + (n - 1)d]$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

Meetkundige Rye en ReekseAlgemene term van 'n **meetkundige ry**: $T_n = a r^{n-1}$ Waar : a – eerste term van die ry r – gemene/konstante verhouding n – posisie van 'n term / aantal terme T_n – n^{de} term**Som formule van 'n meetkundige reeks:**

Sum formular for a geometric series: $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad ; r \neq 1$

Bewys

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \dots (1)$$

maal vergelyking (1) met r

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \dots (2)$$

Trek vergelyking (1) van vergelyking (2) af

$$rS_n - S_n = -a + ar^n$$

$$rS_n - S_n = ar^n - a$$

$$S_n(r - 1) = a(r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad ; r \neq 1$$

SUM TO INFINITY

Formule: $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$; $-1 < r < 1$

Som tot oneindig bestaan vir 'n konvergeerende meetkundige reeks.

Konvergensie: $-1 < r < 1$

SIGMA-NOTASIE

$$\sum_{k=a}^b T_k$$

- T_k is die algemene term
- aantal terme = $Bo - Onder + 1$
 $= (b - a) + 1$

VIR ENIGE SOM FORMULE

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

Eksamenriglyne (Getalpatrone en Rye)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

GETALPATRONE

1. Die reeks van eerste verskille van 'n kwadratiese getalpatroon is lineêr. Daarom kan kennis van lineêre patrone in die konteks van kwadratiese getalpatrone getoets word.
2. Rekursiewe getalpatrone sal nie eksplisiet geëksamineer word nie.
3. Verwantskappe tussen getalpatrone wat in vroeëre grade gedoen is, moet deeglik vasgelê word.

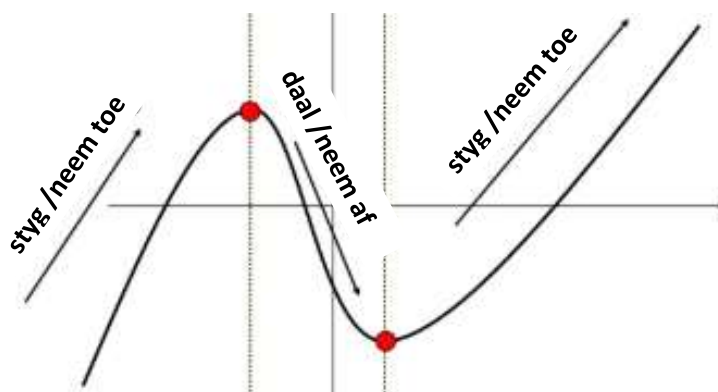
FUNKSIES EN GRAFIEKE

Belangrike Terminologie



Die konsep van styging/toeneem en daling/afneem in funksies : alle funksies

- Die funksie is **STYGEND/NEEM TOE** wanneer die waarde van y toeneem soos die waarde van x toeneem van links na regs.
 - **DIE GRAFIEK GAAN OP** (van links na regs)
- Die funksie is **DALEND/NEEM AF** wanneer die waarde van y afneem soos die waarde van x toeneem van links na regs.
 - **DIE GRAFIEK GAAN AF** (van links na regs)

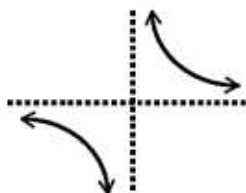
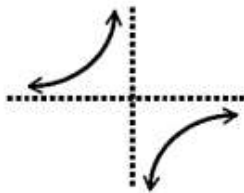


Hiperboliese Funksie (Hiperbool)Die grafiek van $y = \frac{a}{x+p} + q$

Standaardvorm van hiperbool

Neem kennis dat $y = \frac{2}{x-2} + 1$

$$= \frac{2}{x + (-2)} + 1$$

Die vergelykings van die asymptote is: $x = -p$ vertikale asimptoot $y = q$ horisontale asimptootGebied: $x \in R, x \neq -p$ Terrein: $y \in R, y \neq q$ **Vorm**As $a > 0$ dan neem die grafiek af (daal) vir alle $x < 0$ of $x > 0$ **Vorm**As $a < 0$ dan neem die grafiek toe (styg) vir alle $x < 0$ of $x > 0$ 

Die vergelykings van die simmetrie-as

Die hiperbool het twee vergelykings vir simmetrie

$m = 1$	$m = -1$
$y = x + c$	$y = -x + c$

N.B die vergelykings van die simmetrie-as van 'n hiperbool gaan deur die snypunt van die asimptote : $(-p; q)$

In die algemeen, vir die hiperbool, die vergelykings van die simmetrie-as word deur die volgende formules gegee:

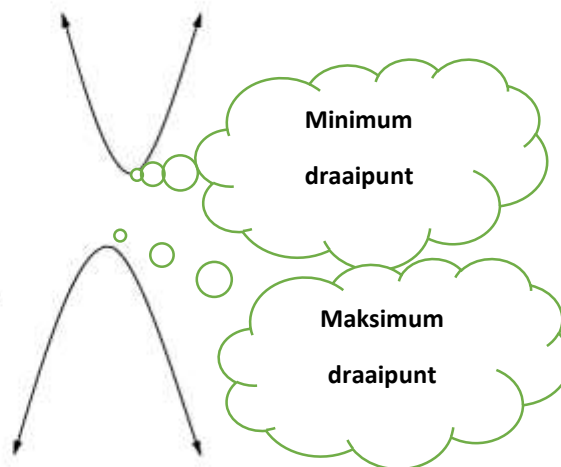
$m = 1$	$m = -1$
$y = (x + p) + q$	$y = -(x + p) + q$
$\therefore y = x + p + q$	$\therefore y = -x - p + q$

N.B Maak seker dat die hiperbool in standaardvorm is voordat formule toegepas word.

Kwadratiese Funksie (Parabool)

Die grafiek van $y = a(x + p)^2 + q$

As a positief is, dws $a > 0$, dan is die vorm van die grafiek ☺.



As a negatief is, dws $a < 0$, dan is die vorm van die grafiek ☹.

Die grafiek het 'n simmetrie-as by $x = -p$

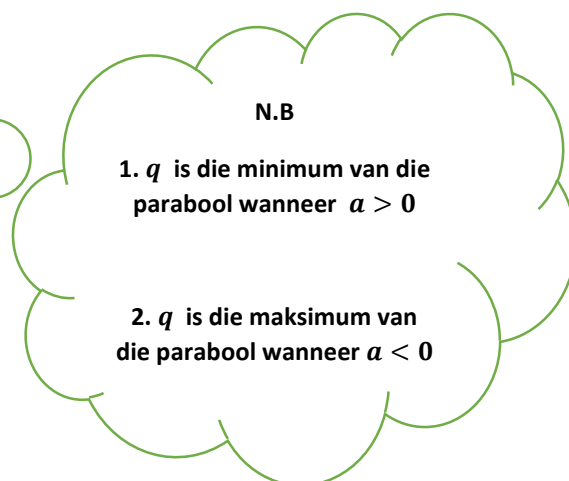
Die grafiek het 'n draaipunt by $(-p ; q)$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \geq q$ ☺ (**WANNEER: $a > 0$**)

of

$y \leq q$ ☹ (**WANNEER: $a < 0$**)



N.B Die parabool verander van stygend na dalend of dalend na stygend by die draaipunt.

<p><u>wanneer: $a > 0$</u></p> <p>1. Die grafiek neem toe : styg vir: $x > -p$</p> <p>2. Die grafiek neem af : daal: $x < -p$</p>
<p><u>wanneer: $a < 0$</u></p> <p>1. Die grafiek neem toe : styg vir: $x < -p$</p> <p>2. Die grafiek neem af : daal vir: $x > -p$</p>

Die kwadratiese funksie kan ook in die volgende vorm voorgestel word:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

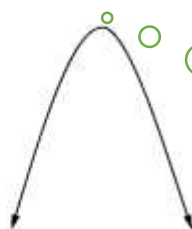
Standaardvorm van
parabool

As a positief is, dws $a > 0$, dan is die vorm van die grafiek ☺.



Minimum
draaipunt

As a negatief is, dws $a < 0$, dan is die vorm van die grafiek ☹.



Maksimum
draaipunt

Die grafiek het 'n simmetrie-as by: $x = -\frac{b}{2a}$

Die grafiek het 'n draaipunt by: $(-\frac{b}{2a} ; f(-\frac{b}{2a}))$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \geq f(-\frac{b}{2a})$ ☺ (**Wanneer: $a > 0$**)

of

$y \leq f(-\frac{b}{2a})$ ☹ (**Wanneer: $a < 0$**)

N.B

1. $f(-\frac{b}{2a})$ is die minimum van die parabool wanneer: $a > 0$

2. $f(-\frac{b}{2a})$ is die maksimum van die parabool wanneer: $a < 0$

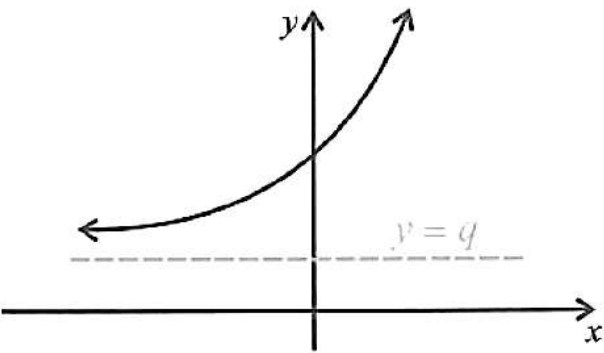
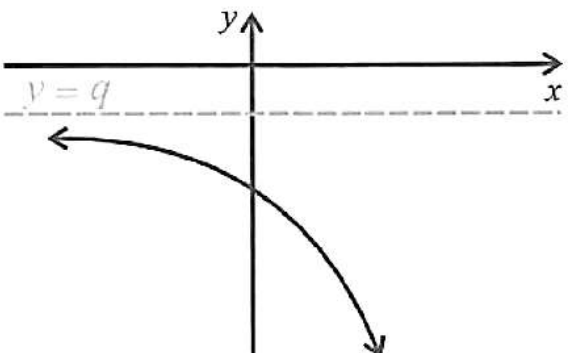
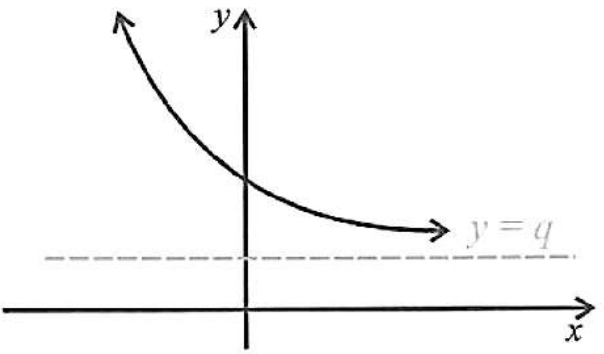
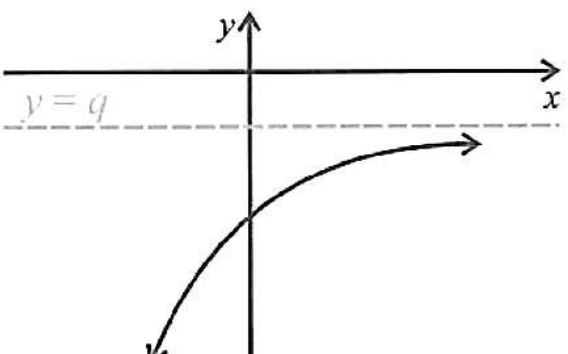
Eksponensiële Funksie

Die grafiek van $y = a \cdot b^{x+p} + q$ waar $b > 0$ en $b \neq 1$

Die vergelyking van 'n asimptoot is: $y = q$ (*horisontale asimptoot*)

Gebied: $x \in \mathbb{R}$

Terrein: $y > q$ [as $a > 0$] of $y < q$ [as $a < 0$]

$a > 0$ and $b > 1$	$a < 0$ and $b > 1$
<p>Die grafiek lê bokant die horisontale asimptoot en is 'n toenemende funksie</p> 	<p>Die grafiek lê onderkant die horisontale asimptoot en is 'n afnemende funksie</p> 
$a > 0$ and $0 < b < 1$	$a < 0$ and $0 < b < 1$
<p>Die grafiek lê bokant die horisontale asimptoot en is 'n afnemende funksie</p> 	<p>Die grafiek lê onderkant die horisontale asimptoot en is 'n toenemende funksie</p> 

(Bron: MATHS MADE EASY – A comprehensive guide to Grade 12 Mathematics)

Transformasie van Funksies**Refleksies en Translasies**

Gegee: $f(x) = \frac{2}{x+1} - 3$	Gegee: $f(x) = 2 \cdot 3^{x-2} + 4$	Gegee: $f(x) = x^2 + 5x + 6$
<p>a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede op en 3 eenhede na links te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$.</p> <p>Oplossing: $g(x) = f(x+3) + 2$ $= \frac{2}{x+3+1} - 3 + 2$ $= \frac{2}{x+4} - 1$</p> <p>b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die x – as te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.</p> <p>Oplossing: $h(x) = -f(x)$ $= -\left(\frac{2}{x+1} - 3\right)$ $= -\frac{2}{x+1} + 3$</p> <p>c. Die grafiek van $m(x)$ iword verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die y – as te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$.</p> <p>Oplossing: $m(x) = f(-x)$ $= \frac{2}{-x+1} - 3$ $= \frac{2}{-(x-1)} - 3$ $= -\frac{2}{x-1} - 3$</p>	<p>a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede op en 3 eenhede na links te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$.</p> <p>Oplossing: $g(x) = f(x+3) + 2$ $= 2 \cdot 3^{x+3-2} + 4 + 2$ $= 2 \cdot 3^{x+1} + 6$</p> <p>b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die x – as te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.</p> <p>Oplossing: $h(x) = -f(x)$ $= -(2 \cdot 3^{x-2} + 4)$ $= -2 \cdot 3^{x-2} - 4$</p> <p>c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die y – as te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$.</p> <p>Oplossing: $m(x) = f(-x)$ $= 2 \cdot 3^{-x-2} + 4$ $= 2 \cdot 3^{-(x+2)} + 4$ $= 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 4$</p>	<p>a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ 2 eenhede af en 3 eenhede na regs te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$.</p> <p>Oplossing: $g(x) = f(x-3) - 2$ $= (x-3)^2 + 5(x-3) + 6 - 2$ $= x^2 - 6x + 9 + 5x - 15 + 4$ $= x^2 - x - 2$</p> <p>b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die x – as te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.</p> <p>Oplossing: $h(x) = -f(x)$ $= -(x^2 + 5x + 6)$ $= -x^2 - 5x - 6$</p> <p>c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die y – as te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$.</p> <p>Oplossing: $m(x) = f(-x)$ $= (-x)^2 + 5(-x) + 6$ $= x^2 - 5x + 6$</p>

Inverse Funksies

Die konsep van 'n funksie

'n Funksie f , word gedefinieer as 'n verhouding tussen waardes, waar elke invoer waarde na een uitvoer waarde afbeeld.

In ander woorde, vir 'n vergelyking om 'n funksie genoem te word, kan daar slegs een y -waarde vir 'n spesifieke x -waarde wees.

Daar is twee tipe funksies:

1. Een-tot-Een Funksie
2. Meer/Baie-tot-een Funksie

EEN-TOT-EEN FUNKSIE

'n Een-tot-een funksie is 'n funksie waar daar 'n enkele y -waarde vir 'n spesifieke x -waarde is.

MEER/BAIE-TOT-EEN FUNKSIE

'n Funksie kan nie meer as een y -waarde vir elke x -waarde het nie. 'n Funksie kan, egter meer as een x -waarde vir 'n spesifieke y -waarde het. Hierdie staan bekend as meer/baie-tot-een funksies.

VERTIKALE LYN TOETS

Om te toets of 'n grafiek 'n funksie is, gebruik die vertikale lyn toets. As 'n vertikale lyn ('n lyn ewewydig aan die y -as) die grafiek meer as eenkeer raak by enige punt, is die grafiek nie 'n funksie nie. Jy hoef nie 'n lyn te teken nie, hou net 'n liniaal parallel aan die y -as en beweeg dit oor die grafiek. As die liniaal die grafiek meer as eenkeer raak vir 'n enkele x -waarde, enige plek op die grafiek, dan is die grafiek nie 'n funksie nie. In die geval dat 'n grafiek nie 'n funksie is nie, word dit 'n relasie genoem.

HORISONTALE LYN TOETS

As 'n grafiek die vertikale lyn toets slaag, is dit 'n funksie. Die horisontale lyn toets kan gebruik word om te bepaal watter tipe funksie die grafiek voorstel.

As 'n horisontale lyn ('n lyn ewewydig aan die x -as) geteken en oor die grafiek beweeg word en dit die grafiek meer as eenkeer raak by enige punt, dan is dit 'n baie/meer-tot-een funksie (baie x -waardes tot 'n enkele y -waarde). Andersins, is dit 'n een-tot-een funksie.

(Bron: MATHS MADE EASY – A comprehensive guide to Grade 12 Mathematics)

NEEM KENNIS DAT:

- Die inverse van 'n funksie neem die y -waardes (terrein) van die funksie om die ooreenkomstige x -waardes (gebied) en vice versa. Daarom word die x - en y - waardes omgeruil.
- Die funksie word gereflekteer in die lyn $y = x$ om die inverse te vorm.
- Die notasie vir die inverse van 'n funksie is f^{-1} .
- NB – Die gebied van die inverse is die terrein van die funksie en die terrein van die inverse is die gebied van die funksie.
- Wanneer die funksie toeneem, neem sy inverse ook toe. Wanneer die funksie afneem, sal die inverse ook afneem.

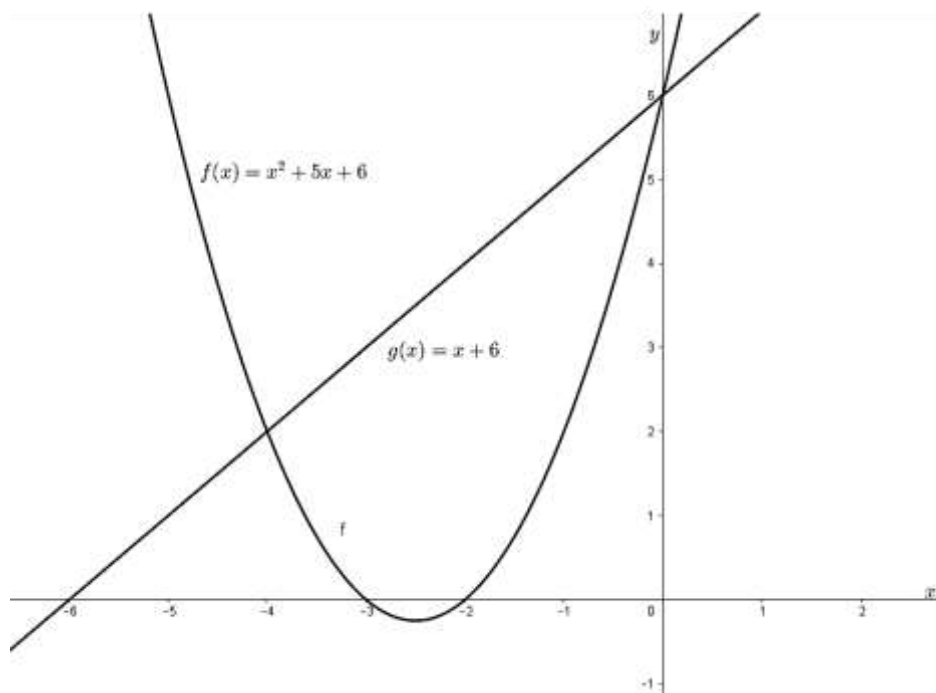
Bepaal en skets die grafieke van die inverses van die funksies gedefinieer deur:

1. $y = ax + q$
2. $y = ax^2$
3. $y = b^x ; (b > 0, b \neq 1)$

Kombinasies van Funksies

Neem kennis van die volgende wanneer daar gewerk word met kombinasies van funksies:

Beskou die grafieke van f en g hieronder:



Vir $f(x) > 0$ of $f(x) < 0$	Vir $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$	Vir $f(x) \cdot g(x) > 0$ of $f(x) \cdot g(x) < 0$
Fokus op die x - as. $f(x) > 0$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ positief is, wat bo die x - as sal wees. En $f(x) < 0$ beteken die grafiek van $f(x)$ is negatief, wat onder die x - as sal wees.	$f(x) > g(x)$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ bokant die grafiek van $g(x)$ is. En $f(x) < g(x)$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ onder die grafiek van $g(x)$ is.	$f(x) \cdot g(x) > 0$ beteken waar die produk van $f(x)$ en $g(x)$ positief is. En $f(x) \cdot g(x) < 0$ beteken waar die produk van $f(x)$ en $g(x)$ negatief is.

Eksamenriglyne (Funksies en Grafieke)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

FUNKSIES

- Kandidate moet in staat wees om funksie-notasie te gebruik en te interpreteer. In die onderrigproses moet leerders verstaan hoe $f(x)$ getransformeer moet word om $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x + a)$, $af(x)$ en $x = f(y)$, waar $a \in R$, te verkry.
- Trigonometriese funksies sal SLEGS in VRAESTEL 2 voorkom.

FINANSIES, GROEI EN VERVAL

Eenvoudige Groei

Formule: $A = P(1 + n.i)$

A = Die eind-bedrag

P = Die begin-bedrag

n = aantal jare

i = rentekoers in desimale

Saamgestelde Groei

Formule: $A = P(1 + i)^n$

A = Die eind-bedrag

P = Die begin-bedrag

n = aantal jare

i = rentekoers in desimale

Eenvoudige Verval (Reguitlyn waardevermindering)

Formule: $A = P(1 - n.i)$

A = Die finale bedrag

P = Die begin bedrag

n = aantal jare

i = rentekoers in desimale

N.B die begin-bedrag is groter as die eind-bedrag

Saamgestelde Verval (verminderdesaldo metode)**Formule: $A = P(1 - i)^n$** A = Die eind-bedrag P = Die begin-bedrag n = aantal jare i = rentekoers in desimale***N.B die begin-bedrag is groter as die eind-bedrag*****Nominale en Effektiewe Rentekoers****Nominale Koers**

Die koers aangehaal, en saamgestelde periode is verskillend:

b.v. 10% p.j. kwartaaliks saamgestel

Effektiewe Koers

Die koers aangehaal, en die saamgestelde periode is dieselfde:

b.v. 10% p.j. jaarliks saamgestel

5% per maand, maandeliks saamgestel

Formule om vanaf nominale rentekoers na effektiewe koers te herlei/verander (en vice versa / omgekeerd)

$$1 + i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m$$

 i_{eff} = effektiewe jaarlikse koers i_{nom} = nominale koers m = aantal saamgestelde periodes per jaar

Oplos vir n

$$A = P(1 \pm i)^n$$

$$(1 \pm i)^n = \frac{A}{P}$$

$$\log (1 \pm i)^n = \log \frac{A}{P}$$

$$n \log (1 \pm i) = \log A - \log P$$

$$\therefore n = \frac{\log A - \log P}{\log(1 \pm i)}$$

N.B**2,3456 jaar = 2 jare 5 maande****Hoe om 5 maande te kry: $[2, 3456 - 2] \times 12 = 5 \text{ maande}$**

Toekomstige Waarde Annuïteite

Formule: $F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$

F = Toekomstige waarde

x = vasgestelde gereelde betalings/paaieimente

n = aantal betalings/paaieimente

i = rentekoers in desimale

Wanneer daar 'n “ x ” onmiddellike betaling gemaak word en die laaste betaling aan die einde van die periode gemaak word:

Gebruik dan die volgende formule: $F = \frac{x[(1+i)^{n+1} - 1]}{i}$

Wanneer daar 'n onmiddellike betaling gemaak word van 'n bedrag wat nie x is nie, sê t , en die laaste betaling word aan die einde van die periode gemaak:

Gebruik dan die volgende formula: $F = t(1+i)^n + \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$

Wanneer betalings aan die begin van elke periode gemaak word of wanneer betalings aan die einde van elke periode gemaak word en die laaste betaling word gemaak, byvoorbeeld 1 maand voor die einde van die periode as rente maandeliks saamgestel word: When payments are made at the beginning of each period or when payments are made at the end of each period and the last payment is made, for an example 1 month before the end of the period if interest is compounded monthly:

Gebruik dan die volgende formule: $F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i} \times (1+i)^n$

Delgingsfonds

Delgingsfonds as 'n bedrag wat belê word om iets in die toekoms te vervang (b.v. Voertuig, Masjiene). Ons gebruik toekomstige waarde annuïteit om geld in gereelde tussenposes te spaar vir geld om in die toekoms te gebruik.

N.B Delgingsfonds (wanneer die bedrag nie gemeld word nie)

= Nuwe prys na inflasie – Boekwaarde/Skrootwaarde

Huidige Waarde Annuïteit

Formule: $P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

P = Huidige waarde (lening-bedrag)

x = vasgestelde gereelde betalings / paaïemente

n = aantal betalings / paaïemente

i = rentekoers in desimale

Rente betaal

Rente bedrag betaal = Alle betalings gemaak – leningsbedrag

Balans op die lening

$$\text{Balans} = P(1+i)^n - \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

OF

$$\text{Balans} = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$n \rightarrow$ aantal oorblywende betalings

Eksamenriglyne (Finansies, Groei en Verval)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

FINANSIES, GROEI EN VERMINDERING

1. Verstaan die verskil tussen nominale en effektiewe rentekoerse en doen gemaklik omskakeling tussen hulle vir die volgende saamgestelde periodes: maandeliks, kwartaalliks en halfjaarlik.
2. Met uitsluiting van die berekening van i in die formules, F_n en P_n , word daar van die kandidate verwag om enige van die ander veranderlikes te bereken.
3. Piramideskemas sal NIE geëksamineer word NIE.

DIFFERENSIALE REKENING (KALKULUS)

Eerste Beginsels

Die formule $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ word gebruik om die enige van die volgende vanuit **EERSTE BEGINSELS** te bepaal of deur die **DEFINISIE** te gebruik.

Die afgeleide van f by enige punt.

- Die gradiënt van die raaklyn aan grafiek f by enige punt.
- Die oombliklike veranderingskoers van 'n funksie by enige punt.
- Die gradiënt van 'n funksie by enige punt.

Jy moet instaat wees om die afgeleides, van die volgende tipes vir eksamen doeleindes, **VANUIT EERSTE BEGINSELS** te bepaal.

$$(x) = c, \quad (x) = ax^2 + bx + c, \quad (x) = ax^3, \quad (x) = \frac{a}{x}$$

Reëls/Wette van Differensiasie

In graad 12 word daar net een reël/wet gebruik, die magsreël/kragregel / konstante-veelvoudreël:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1} \text{ for } n \in \mathbb{R}$$

...wat beteken dat die funksie (ax^n) met betrekking tot x gedifferensieer word.

NOTE: Die notasie wat vir die afgeleide van $y = f(x)$ gebruik is:

$$f'(x) \quad \text{of} \quad y' \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{of} \quad D_x[f(x)]$$

Wanneer on die afgeleide van 'n funksie bepaal, sê ons, ons differensieer die funksie.

- **NB** – die afgeleide van 'n konstante is nul (zero)

$$\text{As, } f(x) = 5$$

dan is,

$$f'(x) = 0$$

- **Stap vir stap voorbeeld, hoe om die reël te gebruik**

$$\text{Differensieer : } y = -2x^3$$

Oplossing :

$$\frac{d(-2x^3)}{dx} = -2 \times 3x^{3-1} = -6x^2$$

Vergelyking van 'n Raaklyn

Die helling van 'n raaklyn aan 'n grafiek by 'n punt is gelyk aan die afgeleide van die funksie by daardie punt. Om dus die vergelyking van 'n raaklyn aan $f(x)$ by $x = a$ te bepaal, moet ons:

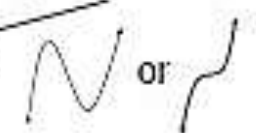
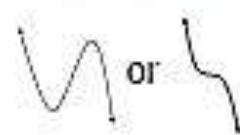
- Bepaal die afgeleide $f'(x)$
- Werk die afgeleide uit by $x = a \rightarrow$ d.w.s bereken $f'(a)$ om die gradiënt van die raaklyn te kry.
- Bereken die y -waarde by $x = a \rightarrow$ d.w.s bereken $f(a)$.
- Die raaklyn is 'n reguitlyn. Ons kan die vergelyking van die reguitlyn bepaal deur $y - y_1 = (x - x_1)$ te gebruik.

N.B Om die vergelyking van 'n raaklyn te bereken, benodig jy die raakpunt en die gradiënt.

Skets van 'n Derde-graadse Funksie

Standaardvorm:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow \text{y-afsnit}$$

$a > 0$  OR $a < 0$ 

Neem kennis van die verskillende terminologie wat vir draaipunte (stasionêre punte) gebruik word.

As $a > 0$

Lokale maksimum



Lokale minimum

As $a < 0$

Lokale maksimum



Lokale minimum

Stappe om te volg wanneer Derde-graadse funksies geskets word:

(N.B: Somtyds, indien nie meeste van die tyd nie, sal jy deur die vraag gelei word, waar om te begin of hoe om te begin skets.)

1. Vorm →



2. Bepaal die x - en y - afsnitte

a. x -afsnitte

- Laat $y = 0$ en vereenvoudig
- Bepaal die faktore
- Los op vir x

b. y -afsnit

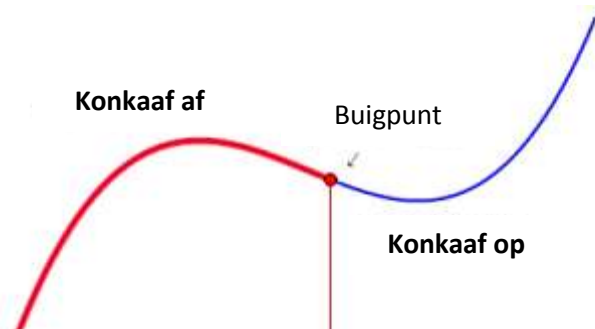
- Laat $x = 0$ en los op vir y

3. Bepaal die draaipunte (stasionêre punte)

- Bepaal die eerste afgeleide, $f'(x)$
- Stel die eerste afgeleide gelyk aan nul/zero
- Los op vir x (hierdie is die x -waardes van die draaipunte)
- Vervang die x -waardes in die oorspronklike funksie, $f(x)$, om die ooreenkomstige y -waardes te kry)

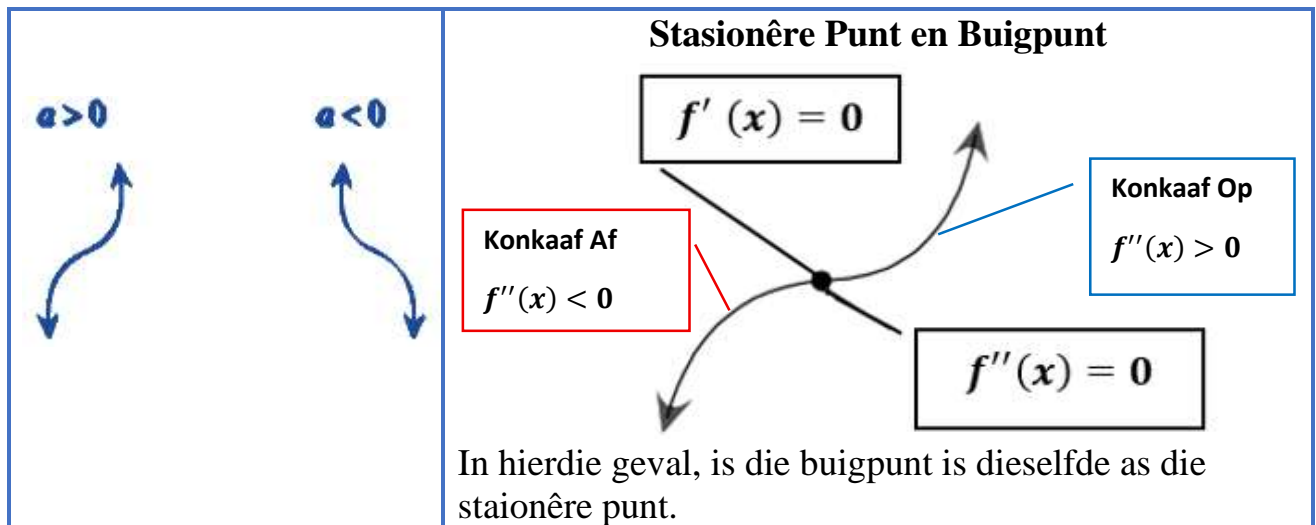
4. Skets die derde-graadse funksie.

5. (N.B Wanneer daar gevra word vir die buigpunt/infleksiepunt, moet jy die twee afgeleide, $f''(x)$ bepaal → Stel die tweede afgeleide gelyk aan nul → Los op vir x om die x -waarde te kry → Vervang x -waarde in die oorspronklike funksie, om die ooreenkomstige y -waarde te kry).

Konkawiteit (Konkawiteit verander by die buigpunt)

Konkaaf af: $f''(x) < 0$

Konkaaf op: $f''(x) > 0$

Die eienskappe van die grafiek van $f(x) = ax^3$ **Toepassings****Optimalisering en tempo van verandering, insluitende die kalkulus van beweging**

Maksimum en minimum kom voor by die draaipunte, wanneer ons dus maksimeer of minimeer, bepaal ons die eerste afgeleide en stel dit gelyk aan nul en los dan op vir die onbekende, x in die meeste gevalle. Die waarde(s) van x wat bepaal word na oplossing is waar die maksimum of minimum voorkom. Kyk of die waarde(s) maksimum of minimum waardes gee deur dit in die oorspronklike vergelyking te vervang..

Eksamenriglyne (Differensiale Reken)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

DIFFERENSIAALREKENING

- Die volgende notasies kan vir differensiaalrekening gebruik word: $f'(x)$, D_x , $\frac{dy}{dx}$ of y' .
- Ten opsigte van derdegraadse (kubiese) funksies, kan van kandidate verwag word om:
 - Die vergelyking van 'n derdegraadse funksie te bepaal.
 - Die aard van die stasionêre punte te bespreek, ingesluit lokale maksimum, lokale minimum en infleksiepunte.
 - Kennis van transformasies op gegewe funksies toe te pas om hul beelde te verkry.
- Van kandidate word verwag om die grafiek van die afgeleide van 'n funksie te skets en te interpreteer.
- Buite-oppervlakte en volume sal in die konteks van optimalisering eksamineer word.
- Kandidate moet die formules vir die buite-oppervlakte en volume van regte prisma's ken. Hierdie formules sal NIE op die formuleblad gegee word NIE.
- Indien 'n optimaliseringsvraag gebaseer is op die buite-oppervlakte en/of volume van 'n keël, sfeer en/of piramide, sal 'n lys van die relevante formules by die vraag gegee word. Daar sal van kandidate verwag word om die korrekte formule uit daardie lys te kies.

TELBEGINSEL EN WAARSKYNLIKHEID

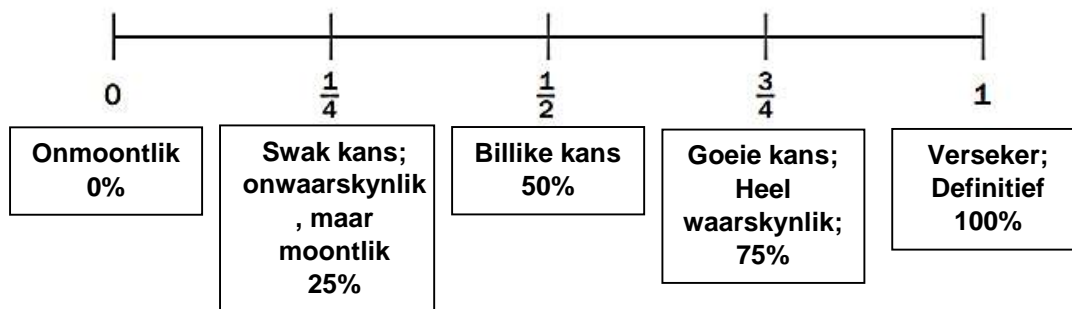
Algemene Waarskynlikheid

Waarskynlikheid verwys na die moontlikheid of kans van 'n gebeurtenis om plaas te vind.

$$\text{Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis} = \frac{\text{aantal gunstige uitkomst}}{\text{totale aantal uitkomst}}$$

Die verhouding kan uitgedruk word as 'n gewone breuk, 'n desimale breuk of 'n persentasie. 'n Waarskynlikheid van 5 uit 8 kan dus geskryf word as $\frac{5}{8}$ of as 0,625 of as 62,5%.

Ons kan 'n waarskynlikheids-skaal gebruik om te besluit watter kans daar is vir 'n gebeurtenis om plaas te vind.



Notasies wat gebruik word om die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis te bepaal:

- $P(A)$ beteken die waarskynlikheid dat gebeurtenis A plaasvind
- $P(A')$ of $P(\text{nie } A)$ beteken die waarskynlikheid dat gebeurtenis A nie plaasvind nie.
- $P(A \text{ of } B) = P(A \cup B)$ beteken die waarskynlikheid dat A of B plaasvind.

\cup is die simbool vir **of**, dit staan ook bekend as die vereniging.

- $P(A \text{ en } B) = P(A \cap B)$ beteken die waarskynlikheid dat A en B plaasvind.

\cap is die simbool vir **en**, dit staan ook bekend as die interseksie.

Die Identiteit

Vir enige twee gebeurtenisse A en B:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$

Die Optel-reël vir Onderling Uitsluitende Gebeurtenisse

Twee gebeurtenisse is onderling uitsluitend as albei gebeurtenisse nie op dieselfde tyd kan plaasvind nie.

Wanneer gebeurtenisse A en B onderling uitsluitend is, $\rightarrow P(A \text{ en } B) = 0$

$$\text{dan is, } P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$$

Die Komplementêre-reël:

Vir twee gebeurtenisse A en B:

$$P(\text{nie } A) = 1 - P(A)$$

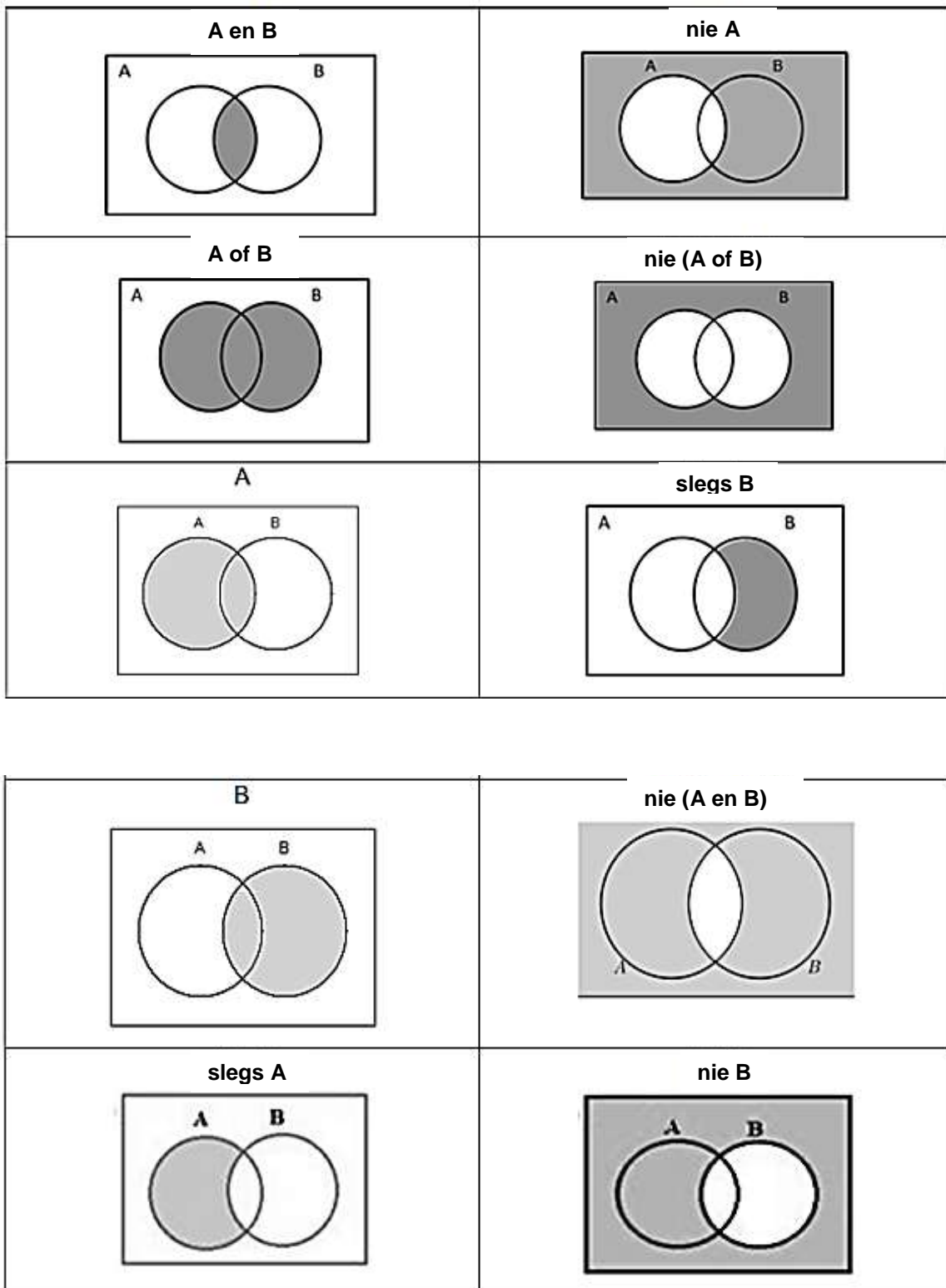
Die Produk-reël vir Onafhanklike Gebeurtenisse

Wanneer twee gebeurtenisse A en B onafhanklik is, dan is:

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

Venn-Diagramme

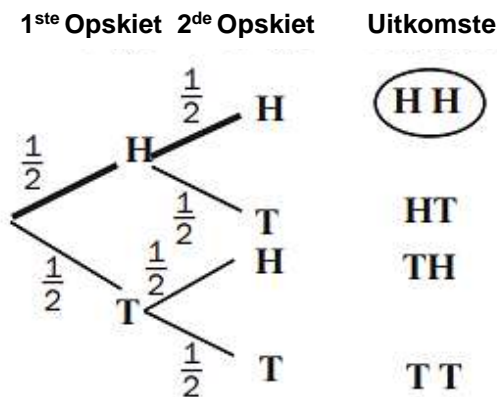
Die ge-arseerde gebiede stel die gebeurtenisse bokant die Venn-diagram voor.



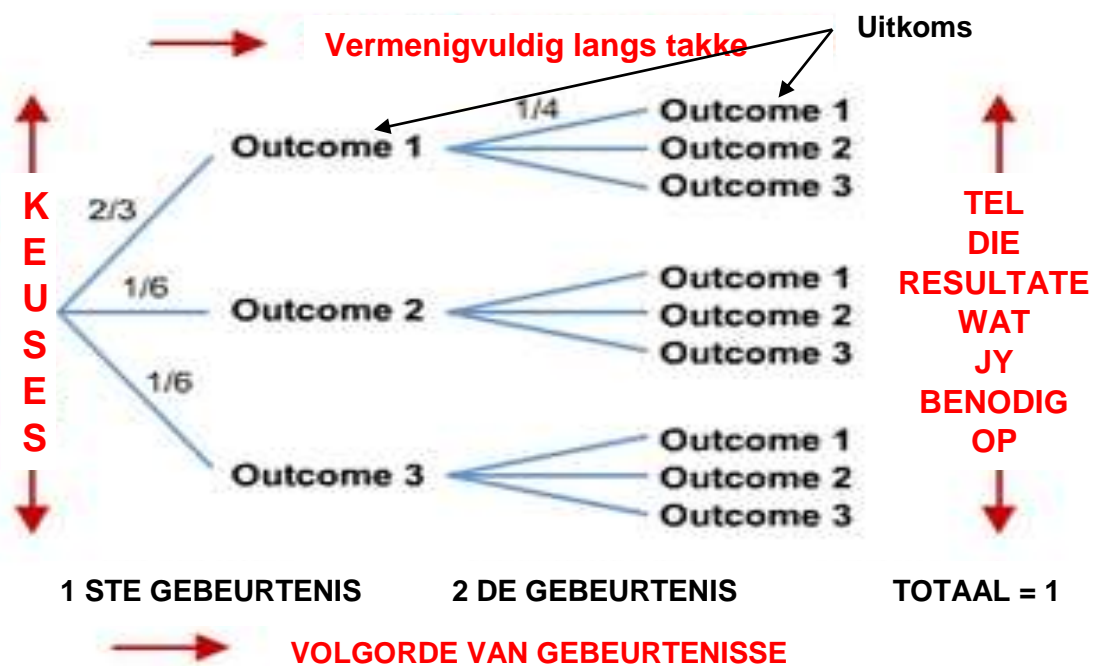
Boom-diagramme

'n Boom-diagram is 'n prent wat jou help om al die moontlike uitkomst van gebeurtenisse te lys. 'n Boom-diagram is 'n hulpmiddel wat baie nuttig is vir vrae oor **vervanging en nie-vervanging**.

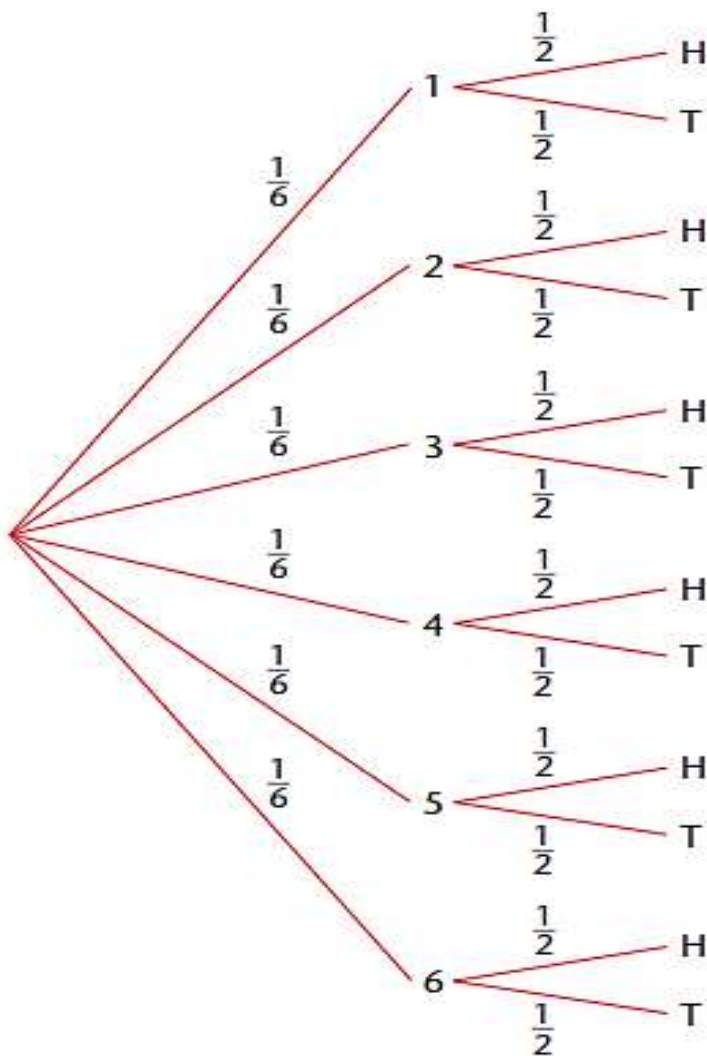
Hier is 'n boom-diagram vir $P(H \text{ en } H)$ as 'n muntstuk tweekeer opgeskiet word:



In 'n boom-diagram (wanneer dit voltooi is), om die waarskynlikheid van 'n uitkoms te bepaal, maal oor/langs die takke. As meer as een uitkoms die di twat verlanf word bevredig, dan word die antwoorde wat deur vermenigvuldiging verkry is opgetel/bymekaar getel. Onthou dat elke "stel/groep takke se waarskynlikhede optel tot 1.



Wanneer meer as een gebeurtenis plaasvind agtereenvolgings of gelyktydig, is dit nuttig om dit met 'n boomdiagram voor te stel. Ons stel elke gebeurtenis deur 'n kolom takke voor, en die aantal takke word bepaal deur die aantal moontlike uitkomst vir daardie gebeurtenis. Byvoorbeeld, as 'n dobbelsteen gerol word, is daar ses moontlike uitkomst, nommers 1 tot 6, wat ons deur 6 verskillende lyne (takke) voorstel – geteken vanaf dieselfde beginpunt. As 'n muntstuk (met twee moontlike uitkomst, kop of stert) opgeskiet word, dan teken ons die boom-diagram soos hieronder aangetoon:



Tweerigting Gebeurlikheidstabelle

Tweerigting gebeurlikheidstabelle is hulpmiddels wat gebruik word om data, wat twee kategorieë veranderlikes insluit, te organiseer en voor te stel. Hulle help leerders om waarskynlikhede gebaseer op lewensegte data of opname data te analiseer en te bereken.

	A_1	B_1	TOTAAL
B_1	p	q	$p + q$
B_2	r	s	$r + s$
TOTAAL	$p + r$	$q + s$	$p + q + r + s = n$

Onder is 'n paar voorbeelde van hoe om waarskynlikhede te bepaal deur die gebeurlikheidstabel te gebruik.

$$P(A_1) = \frac{p + r}{n}$$

$$P(B_2) = \frac{r + s}{n}$$

$$P(A_1 \cap B_2) = \frac{r}{n}$$

Fundamentele Telbeginsel

- Die fundamentele telbeginsel is 'n vinnige metode vir die berekening van die aantal uitkomst deur vermenigvuldiging te gebruik.

- Die fundamentele telbeginsel meld:

Veronderstel daar is n_1 maniere om 'n keuse te maak, en vir elk van hierdie is daar n_2 maniere om 'n tweede keuse te maak, en vir elk van hierdie is daar n_3 maniere om 'n derde keuse te maak, en so aan . . .

Die produk $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ is die aantal moontlike uitkomst.

In eenvoudige taal sê die fundamentele telbeginsel:

“As jy heel paar fases van 'n gebeurtenis het, elk met 'n verskillende aantal uitkomst, dan kan jy die TOTALE aantal uitkomst bepaal deur die aantal uitkomst vir elke fase te vermenigvuldig.”

Bron: Counting Since 2014 – Pat Tshikane

Stappe om Telbeginsel Probleme op te los.

1. Verstaan die Scenario

- Lees die probleem sorgvuldig
- Identifiseer wat getel word (bv. Wagwoorde, uitrustings, rangskikkings)
- Bepaal hoeveel fases of keuses betrokke is.

2. Breuk die probleem in fases op

- Elke fase stel 'n besluit of keuse voor (bv. kies 'n letter, 'n syfer, 'n kleur)
- Skryf neer hoeveel opsies in elke fase beskikbaar is.

3. Kyk vir Beperkings

- Is daar enige reëls soos:
 - Geen herhaling?
 - Moet ewe/onewe wees?
 - Moet met 'n sekere letter begin?
- Pas die aantal keuses dien ooreenkomstig aan.

4. Pas die Telbeginsel toe

- Vermenigvuldig die aantal keuses by elke fase:
- Totale uitkomst = Keuses by Fase 1 x Keuses by Fase 2 x . . .

5. Kyk weer na jou werk

- Maak seker dat jy alle fases en beperkings in ag geneem het
- Bereken weer – om jou antwoord te bevestig.

Bron: Counting Since 2014 – Pat Tshikane

Eksamenriglyne (Telbeginsel en Waarskynlikheid)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

1. Afhanklike gebeurtenisse is eksamineerbaar, maar voorwaardelike waarskynlikhede is NIE deel van die sillabus NIE.
2. Afhanklike gebeurtenisse waar 'n item nie vervang word nie, is eksamineerbaar.
3. Vrae wat vereis dat 'n leerder die verskillende aantal maniere wat items in 'n sirkel gerangskik kan word moet tel en/of die gebruik van kombinasies, is nie in die gees van die kurrikulum nie.
4. Ten opsigte van woordrangskikkings, kan letters wat in die woord herhaal word, beskou word as dieselfde (ononderskeibaar) of verskillend (onderskeibaar). Die vraag sal in so 'n geval baie spesifiek wees.

AFDELING 2:

Vraestel 1 – Aktiwiteite

VRAESTEL 1 AKTIWITEITE**Algebra, Vergelykings en Ongelykhede***(Mei/Junie 2024)***VRAAG 1**1.1 Los op vir x :

1.1.1 $3x^2 + 5x = 0$ (2)

1.1.2 $4x^2 + 3x - 5 = 0$ (antwoorde korrek tot TWEE desimale plekke) (3)

1.1.3 $(x-1)^2 - 9 \geq 0$ (4)

1.1.4 $5^{2x} - 5^x = 0$ (4)

1.1.5 $\frac{x}{\sqrt{20-x}} = 1$ (5)

1.2 Los gelyktydig vir x en y op:

$x + y = 9$ en $2x^2 - y^2 = 7$ (5)

1.3 Gegee: $P = (1-a)$ en $T = (1+a)(1+a^2)(1+a^4) \dots (1+a^{512})$ Bepaal die waarde van $P \times T$ in terme van a . (3)
[26]

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 1**1.1 Los op vir x :

1.1.1 $x^2 - 7x + 12 = 0$ (3)

1.1.2 $x(3x + 5) = 1$ (korrek tot TWEE desimale syfers) (4)

1.1.3 $x^2 < -2x + 15$ (4)

1.1.4 $\sqrt{2(1-x)} = x - 1$ (4)

1.2 Los gelyktydig vir x en y op:

$3^{x+y} = 27$ en $x^2 + y^2 = 17$ (6)

1.3 Bepaal, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waarde van:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$
 (3)
[24]

*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 1**1.1 Los op vir x :

1.1.1 $x^2 + 2x - 15 = 0$ (3)

1.1.2 $5x^2 - x - 9 = 0$ (Los jou antwoord korrek tot TWEE desimale syfers.) (3)

1.1.3 $x^2 \leq 3x$ (4)

1.2 Gegee: $a + \frac{64}{a} = 16$

1.2.1 Los op vir a . (3)

1.2.2 Los vervolgens op vir x : $2^x + 2^{6-x} = 16$ (3)

1.3 **Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, bereken die waarde van $\sqrt{\frac{2^{1002} + 2^{1006}}{17(2)^{998}}}$ (4)1.4 Los gelyktydig vir x en y op:

$2x - y = 2$ en $\frac{1}{x} - 3y = 1$ (6)
[26]

Getalpatrone en Rye*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 2**

2.1 Beskou die meetkundige reeks: $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$

2.1.1 Konvergeer die reeks? Motiveer jou antwoord. (2)

2.1.2 Bereken S_{∞} . (2)

2.2 Gegee: $\sum_{p=k}^{10} 3^{p-1} = 29\,520$. Bereken die waarde van k . (5)
[9]

VRAAG 3

3.1 Beskou die kwadratiese getalpatroon: 3 ; 7 ; 12 ; ...

3.1.1 Dui aan dat die algemene term van hierdie getalpatroon gegee word deur
 $T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$. (3)

3.1.2 Watter getal moet by T_{n-1} getel word sodat $T_n = 13\,527$? (4)

3.2 Gegee 'n rekenkundige reeks met $T_1 = 8$ en $T_2 = 11$.

3.2.1 Bereken die waarde van n indien $T_n = 41$. (3)

3.2.2 'n Nuwe rekenkundige reeks P word gevorm deur die termposisie en die termwaarde van die gegewe rekenkundige reeks te gebruik.
 $P_8 = 1$, $P_{11} = 2$ vir die nuwe reeks, en so aan.

(a) Skryf die waarde van P_{41} neer. (1)

(b) Bereken die waarde van die eerste term van die nuwe rekenkundige reeks. (4)
[15]

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 2**

2.1 Gegee die meetkundige reeks: $\frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \dots$

2.1.1 Is dit 'n konvergerende meetkundige reeks? Motiveer jou antwoord met die nodige berekeninge. (2)

2.1.2 Bereken die som tot oneindig van hierdie reeks. (2)

2.2 'n Rekenkundige en 'n meetkundige ry word gekombineer om die patroon te vorm wat gegee word deur: $P_n = x; \frac{1}{3}; 2x; \frac{1}{9}; 3x; \frac{1}{27}; \dots$

2.2.1 Skryf die volgende TWEE terme van die patroon neer. (2)

2.2.2 Bepaal die algemene term (T_n) vir die onewe terme van hierdie patroon. Skryf jou antwoord in terme van x neer. (2)

2.2.3 Bereken die waarde van P_{26} . (3)

2.2.4 Indien $\sum_{n=1}^{21} P_n = 33,5$, bepaal die waarde van x . (6)
[17]

VRAAG 3

'n Kwadratiese ry het die volgende eienskappe:

- Die tweede verskil is 10.
- Die eerste twee terme is gelyk, d.w.s. $T_1 = T_2$.
- $T_1 + T_2 + T_3 = 28$

3.1 Toon dat die algemene term van die ry $T_n = 5n^2 - 15n + 16$ is. (6)

3.2 Is 216 'n term van hierdie ry? Motiveer jou antwoord met die nodige berekeninge. (3)
[9]

*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 2**

2.1 Die eerste term van 'n rekenkundige ry is -1 en die 7^{de} term is 35 .

Bepaal:

2.1.1 Die gemeenskaplike verskil van die ry (2)

2.1.2 Die aantal terme in die ry indien die laaste term van die ry 473 is (3)

2.1.3 Die som van die eerste 40 terme in die ry (2)

2.2 $75; 53; 35; 21; \dots$ is 'n kwadratiese getalpatroon.

2.2.1 Skryf die VYFDE term van die getalpatroon neer. (1)

2.2.2 Bepaal die n^{de} term van die getalpatroon. (4)

2.2.3 Bepaal die maksimum waarde van die volgende getalpatroon:
 $-15; -\frac{53}{5}; -7; -\frac{21}{5}; \dots$ (4)

[16]

VRAAG 3

3.1 Beskou die volgende meetkundige ry: $1\,024; 256; 64; \dots$

Bereken:

3.1.1 Die 10^{de} term van die ry (2)

3.1.2 $\sum_{p=0}^8 256(4^{1-p})$ (4)

3.2 Die eerste twee terme van 'n meetkundige ry is:

$$-t^2 - 6t - 9 \text{ en } \frac{t^3 + 9t^2 + 27t + 27}{2}$$

Bepaal die waardes van t waarvoor die ry sal konvergeer. (5)

[11]

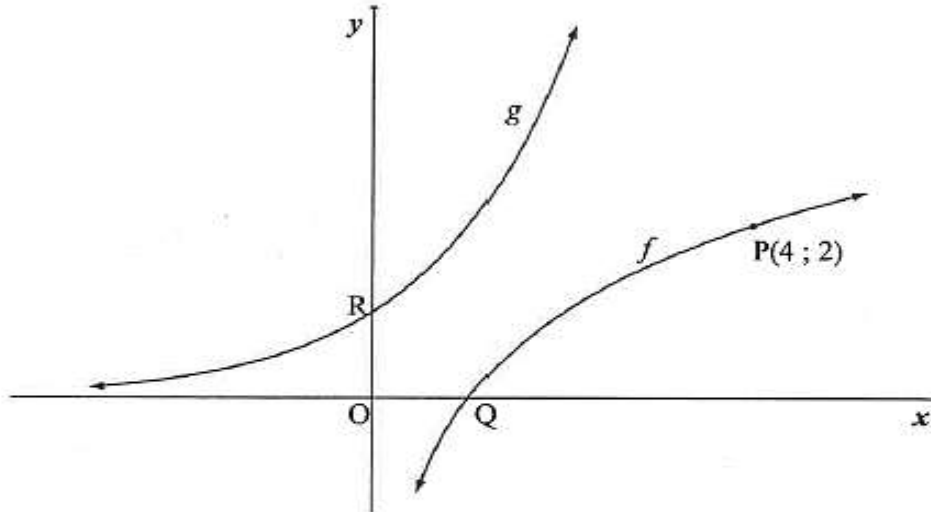
Funksies en Grafieke*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 4**

Gegee: $g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

- 4.1 Skryf die vergelykings van die asimptote van g neer. (2)
- 4.2 Teken 'n grafiek van g en dui enige afsnitte met die asse en asimptote aan. (4)
- 4.3 Bepaal die waardes van x waarvoor $g(x) > 0$. (2)
- 4.4 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van g wat 'n negatiewe gradiënt het. (2)
- [10]

VRAAG 5

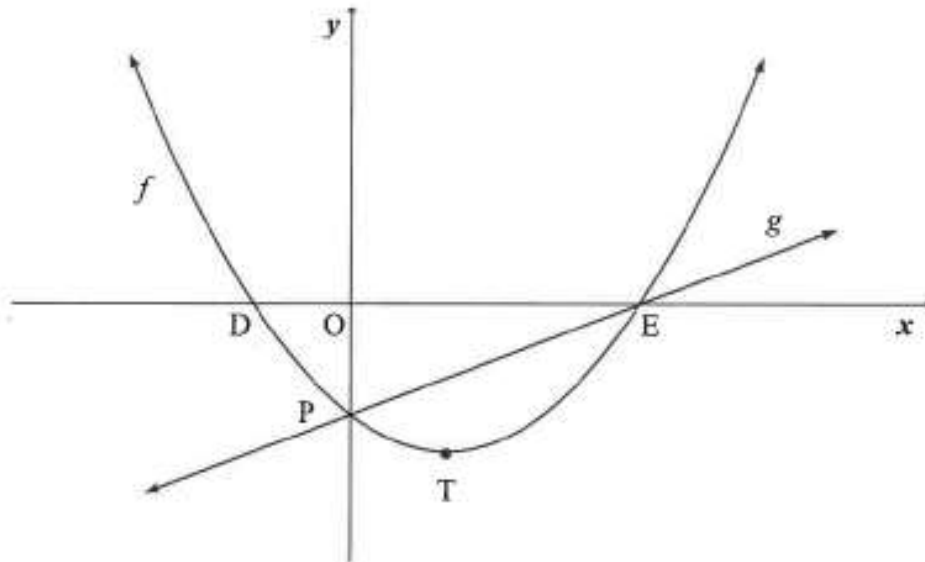
In die diagram is die grafieke van $f(x) = \log_a x$ en g geskets. Grafiek g is die refleksie van f in die lyn $y = x$. Grafiek f gaan deur die punt $P(4; 2)$. Q is die x -afsnit van f en R is die y -afsnit van g .



- 5.1 Skryf die koördinate van P' , die beeld van P op g , neer. (2)
 - 5.2 Toon dat $a = 2$. (2)
 - 5.3 Skryf die vergelyking van g in die vorm $y = \dots$ neer. (1)
 - 5.4 T is 'n punt op f in die eerste kwadrant, met TR ewewydig aan die x -as. Bereken die oppervlakte van $\triangle RTP'$. (4)
- [9]

VRAAG 6

Die grafieke van $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $g(x) = mx + c$ is hieronder geskets. D en E is die x -afsnitte en P is die y -afsnit van f . Die draaipunt van f is T(1 ; -4). Die grafieke van f en g sny mekaar by P en E.



- 6.1 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)
- 6.2 Bereken die koördinate van D en E. (3)
- 6.3 Bepaal die vergelyking van g . (2)
- 6.4 Skryf die waardes van x neer waarvoor $f(x) - g(x) > 0$. (2)
- 6.5 Bepaal die maksimum vertikale afstand tussen h en g indien $h(x) = -f(x)$ vir $x \in [-2 ; 3]$. (5)
- 6.6 Gegee: $k(x) = g(x) - n$.
Bepaal n indien k 'n raaklyn aan f is. (5)
- [18]**

(Mei/Junie 2023)

VRAAG 4

4.1 Gegee die funksie $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

4.1.1 Is p 'n stygende of dalende funksie? (1)

4.1.2 Bepaal p^{-1} , die inverse van p , in die vorm $y = \dots$ (2)

4.1.3 Skryf die definisieversameling van p^{-1} neer. (1)

4.1.4 Skryf die vergelyking van die asimptoot van $p(x) - 5$ neer. (1)

4.2 Gegee: $f(x) = \frac{4}{x-1} + 2$

4.2.1 Skryf die vergelyking van die asimptote van f neer. (2)

4.2.2 Bereken die x -afsnit van f . (2)

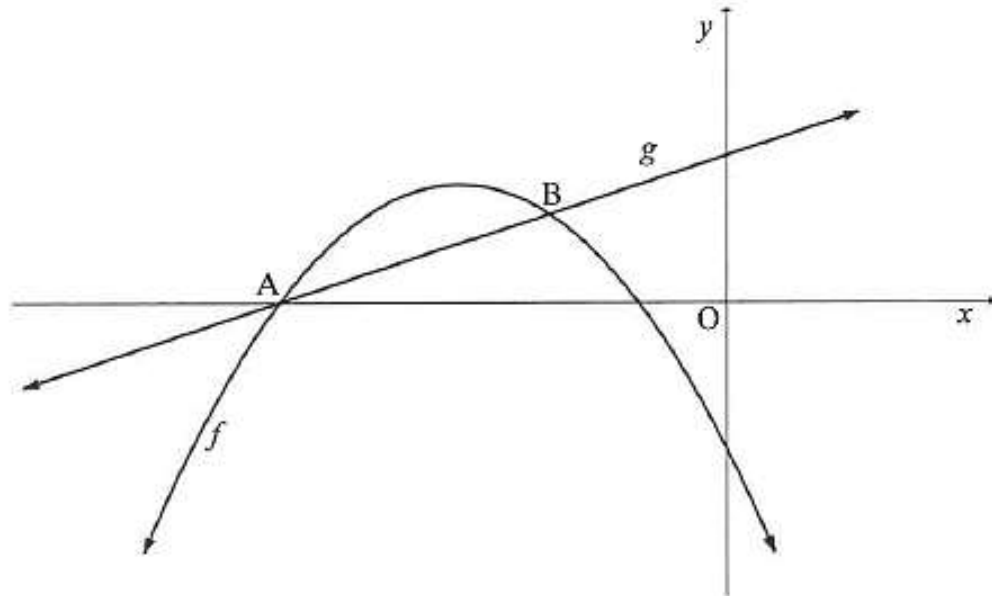
4.2.3 Teken die grafiek van f , en dui alle asimptote en die afsnitte met die asse aan. (4)

4.2.4 Gebruik jou grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $\frac{4}{x-1} \geq -2$. (2)

4.2.5 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van $f(x-2)$, wat 'n negatiewe gradiënt het. (3)
[18]

VRAAG 5

Die grafieke van die funksies $f(x) = -(x+3)^2 + 4$ en $g(x) = x + 5$ is hieronder geteken. Die grafieke sny by A en B.



- 5.1 Skryf die koördinate van die draaipunt van f neer. (2)
- 5.2 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)
- 5.3 Toon dat die x -koördinate van A en B onderskeidelik -5 en -2 is. (4)
- 5.4 Vervolgens, bepaal die waardes van c waarvoor die vergelyking $-(x+c+3)^2 + 4 = (x+c) + 5$ EEN negatiewe en EEN positiewe wortel het. (2)
- 5.5 Die maksimum afstand tussen f en g in die interval $x_A < x < x_B$ is k .
Indien $h(x) = g(x) + k$, bepaal die vergelyking van h in die vorm $h(x) = \dots$ (5)

[14]

*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 4**

Die grafiek van $g(x) = a\left(\frac{1}{3}\right)^x + 7$ gaan deur punt $E(-2; 10)$.

4.1 Bereken die waarde van a . (3)

4.2 Bereken die koördinate van die y -afsnit van g . (2)

4.3 Beskou: $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

4.3.1 Beskryf die translasie van g na h . (2)

4.3.2 Bepaal die vergelyking van die inverse van h , in die vorm $y = \dots$ (2)

[9]**VRAAG 5**

Beskou: $g(x) = \frac{a}{x+p} + q$

Die volgende inligting van g word gegee:

- Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}; x \neq -2$
- x - afsnit by $K(1; 0)$
- y - afsnit by $N\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

5.1 Toon dat die vergelyking van g gegee word deur: $g(x) = \frac{-3}{x+2} + 1$ (6)

5.2 Skryf die waardeversameling van g neer. (1)

5.3 Bepaal die vergelyking van h , die simmetrie-as van g , in die vorm $y = mx + c$, waar $m > 0$. (3)

5.4 Skryf die koördinate van K' , die beeld van K gereflekteer oor h , neer. (2)

[12]

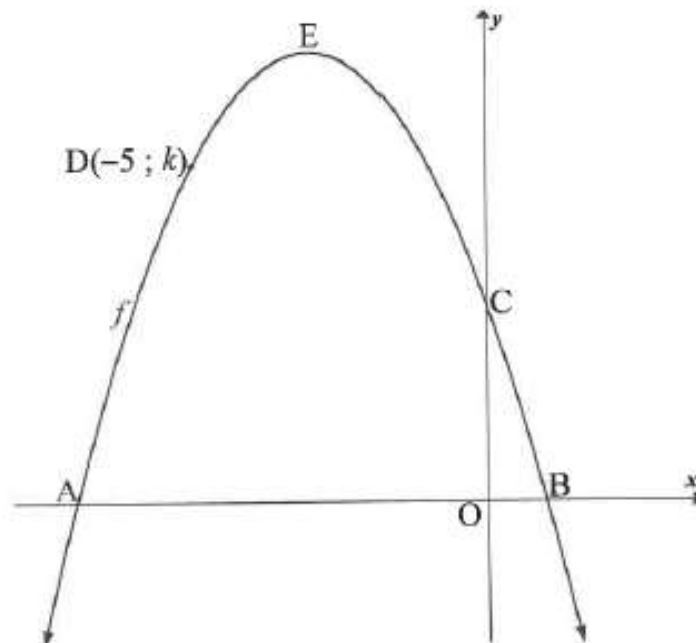
VRAAG 6

Die skets hieronder toon die grafiek van $f(x) = -x^2 - 6x + 7$.

C is die y -afsnit van f .

A en B is die x -afsnitte van f .

$D(-5; k)$ is 'n punt op f .



- | | | |
|-----|--|-------------|
| 6.1 | Bereken die koördinate van E, die draaipunt van f . | (3) |
| 6.2 | Skryf die waarde van k neer. | (1) |
| 6.3 | Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur C en D gaan. | (4) |
| 6.4 | 'n Raaklyn, ewewydig aan CD, raak f by P. Bepaal die koördinate van P. | (4) |
| 6.5 | Vir watter waardes van x sal $f(x) - 12 > 0$? | (2) |
| | | [14] |

Finance, Groei en Verval*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 7**

- 7.1 Thabo het ses jaar gelede 'n foon vir R13 000 gekoop. Die waarde van die foon het jaarliks volgens die verminderdesaldo-metode verminder. Die waarde van die foon is nou R8 337,75. Bereken die jaarlikse depresiasiekoers. (3)
- 7.2 Eric en Thandi moet elkeen R80 000 spaar om aan die einde van Desember 2027 met vakansie te gaan.
- Thandi besluit dat sy teen die einde van Januarie 2025 sal begin spaar. Sy sal 36 maandelikse deposito's in 'n spaarrekening maak, wat teen 8,6% p.j. rente betaal, maandeliks saamgestel. Die deposito sal aan die einde van elke maand gemaak word.
 - Eric bereken dat as hy aan die einde van Januarie 2024 begin en 48 deposito's van R1 402,31 maak, hy genoeg geld sal hê om met vakansie te gaan. Hy sal sy deposito's aan die einde van elke maand in 'n spaarrekening maak. Die spaarrekening betaal rente teen 8,6% p.j., maandeliks saamgestel.
- Bereken die verskil tussen die totale bedrag geld wat Eric en Thandi oor die gegewe tydperk in hulle onderskeie spaarrekenings sal deponeer. (4)
- 7.3 'n Lening van R225 000 is aan Lesibana toegestaan. Die rentekoers van die lening is 9% p.j., maandeliks saamgestel. Lesibana sal maandelikse betalings van R5 500 maak, met die eerste betaling presies vier maande nadat die lening toegestaan is. Hoeveel betalings sal Lesibana maak om die lening te vereffen? (6)
- [13]

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 6**

- 6.1 'n Maatskappy het op 1 Julie 2022 'n fotostaatmasjien vir R150 000 gekoop. Hulle sal die ou fotostaatmasjien inruil wanneer hulle dit oor 5 jaar, op 30 Junie 2027, met 'n soortgelyke nuwe fotostaatmasjien vervang.
- 6.1.1 Die gemiddelde inflasiekoers vir die volgende 5 jaar sal 6,5% p.j. wees. Bepaal die prys van 'n soortgelyke nuwe fotostaatmasjien oor 5 jaar. (2)
- 6.1.2 Bereken die inruilwaarde van die ou fotostaatmasjien na 5 jaar, indien dit teen 'n koers van 9% p.j. volgens die reguitlynmetode depresieer. (2)
- 6.1.3 Die maatskappy het 'n delgingsfonds gestig om die vervangingskoste van die nuwe fotostaatmasjien te dek. Die fonds verdien rente teen 7,85% p.j., maandeliks saamgestel. Die maatskappy het hulle eerste maandelikse deposito op 31 Julie 2022 gemaak en sal tot 31 Mei 2027 voortgaan om dit te doen, een maand voordat die nuwe fotostaatmasjien gekoop word. Hoeveel moet aan die einde van elke maand gedeponeer word sodat die maatskappy die nuwe fotostaatmasjien kan koop? (4)
- 6.2 Andrew het vandag R200 000 by 'n bank geleen. Die bank hef rente teen 5,25% p.j., kwartaalliks saamgestel. Andrew sal aan die einde van elke 3 maande terugbetalings van R6 000 maak. Sy eerste terugbetaling sal 3 maande van nou af gemaak word. Hoeveel jaar sal dit Andrew neem om hierdie lening terug te betaal? (5)
[13]

*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 7**

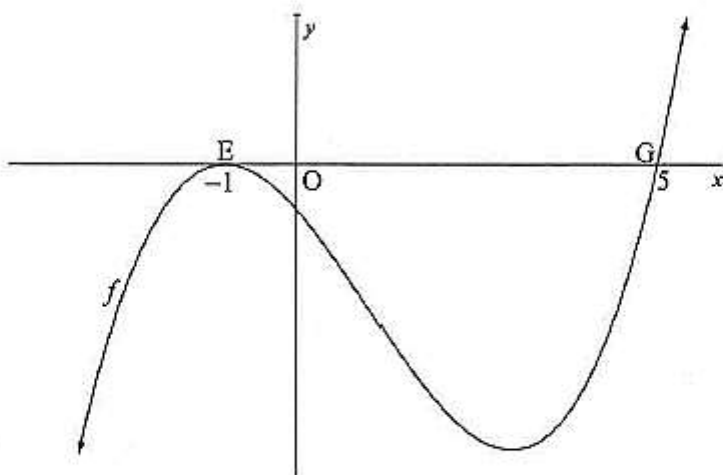
- 7.1 Hoeveel jaar sal dit 'n belegging neem om in waarde te verdubbel indien die belegging rente verdien teen 'n koers van 8,5% p.j., kwartaalliks saamgestel? (4)
- 7.2 'n Maatskappy het masjinerie vir R500 000 gekoop. Na 5 jaar is die masjinerie vir R180 000 verkoop en nuwe masjinerie is gekoop.
- 7.2.1 Bereken die waardeverminderingkoers van die ou masjinerie oor die 5 jaar, deur die verminderdesaldo-metode te gebruik. (4)
- 7.2.2 Die inflasiekoers vir die koste van die nuwe masjinerie is 6,3% p.j. oor die 5 jaar. Wat sal die nuwe masjinerie aan die einde van 5 jaar kos? (2)
- 7.2.3 Die maatskappy het 'n delgingsfonds begin en die eerste inbetaling in hierdie fonds gemaak op die dag toe die ou masjinerie gekoop is. Die laaste inbetaling is gemaak drie maande voordat die nuwe masjinerie aan die einde van die 5 jaar aangekoop is. Die rente verdien op die delgingsfonds was 10,25% p.j., maandeliks saamgestel. Die geld in die delgingsfonds en die R180 000 uit die verkoop van die ou masjinerie is gebruik om vir die nuwe masjinerie te betaal.
- Bereken die maandelikse inbetaling in die delgingsfonds. (5)
[15]

Differensiale Rekene*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 8**

- 8.1 Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels indien $f(x) = \frac{1}{x}$. (5)
- 8.2 Bepaal:
- 8.2.1 $\frac{d}{dx}(\sqrt{4x^6} + \sqrt{2}x^2)$ (3)
- 8.2.2 $g'(x)$ indien $g(x) = \frac{3x^4 - 4x^2 + 6}{x^2}$ (3)
- 8.3 Die vergelyking van die raaklyn aan $f(x) = 3x^2 + bx + c$ by $x = 1$ word gegee deur $y = 9x - 9$. Bepaal die waardes van b en c . (4)
[15]

VRAAG 9

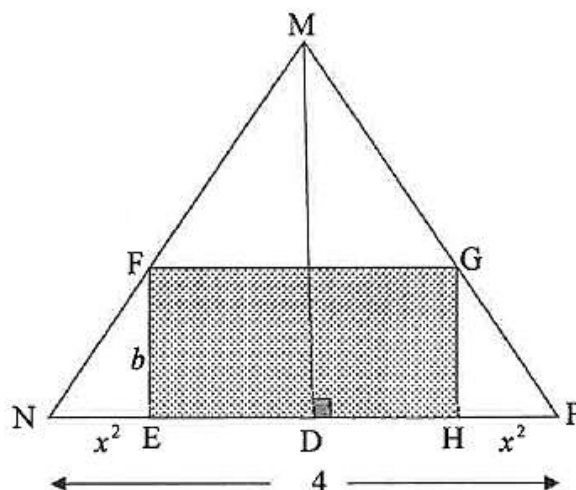
Die grafiek van $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ is hieronder geskets. E(-1 ; 0) en G(5 ; 0) is die x-afsnitte van f .



- 9.1 Toon dat $a = 1$, $b = -3$ en $c = -9$. (3)
- 9.2 Bereken die waarde van x waarvoor f 'n lokale minimum waarde het. (4)
- 9.3 Gebruik die grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $f''(x), f(x) > 0$. (3)
- 9.4 Vir watter waardes van t sal die grafiek van $p(x) = f(x) + t$ twee verskillende positiewe wortels en een negatiewe wortel hê? (3)
[13]

VRAAG 10

EHGF is 'n reghoek. HE word x^2 cm verleng na N en EH word x^2 cm verleng na P. NF verleng, sny PG verleng by M om 'n gelykbenige driehoek MNP met $NM = MP$ te vorm. D is 'n punt op NP waar $MD \perp NP$. $NP = 4$ cm en $MD = 3$ cm.



10.1 Toon dat die area van EFGH deur $A(x) = 6x^2 - 3x^4$ gegee word. (4)

10.2 Bereken die maksimum oppervlakte van reghoek EFGH. (4)
[8]

(Mei/Junie 2023)

VRAAG 7

7.1 Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels, indien $f(x) = -2x^2 - 1$. (5)

7.2 Bepaal:

7.2.1 $f'(x)$, indien dit gegee word dat $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ (2)

7.2.2 $\frac{dy}{dx}$ indien $y = 2x + \frac{1}{\sqrt{4x}}$ (4)

7.3 Die grafiek $y = f'(x)$ het 'n minimum draaipunt by $(1; -3)$.
Bepaal die waardes van x waarvoor f konkaf af is. (2)
[13]

VRAAG 8

Gegee: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

- 8.1 Skryf die y -afsnit van f neer. (1)
- 8.2 Toon dat 2 'n wortel van die vergelyking $f(x) = 0$ is. (2)
- 8.3 Faktoriseer vervolgens $f(x)$ volledig. (3)
- 8.4 Indien dit verder gegee word dat die koördinate van die draaipunte naastenby $(0,7; -12,6)$ en $(-3,4; 20,8)$ is, teken die grafiek van f en dui al die afsnitte en draaipunte aan. (3)
- 8.5 Gebruik jou grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor:
- 8.5.1 $f'(x) < 0$ (2)
- 8.5.2 Die gradiënt van 'n raaklyn aan f 'n minimum is (2)
- 8.5.3 $f'(x) \cdot f''(x) \leq 0$ (3)
- [16]

VRAAG 9

'n Draad, 12 meter lank, word in twee stukke geknip. Die een deel word gebuig om 'n gelyksydige driehoek te vorm en die ander 'n vierkant. 'n Sy van die driehoek se lengte is $2x$ meter.

- 9.1 Skryf die lengte van 'n sy van die vierkant in terme van x neer. (2)
- 9.2 Indien hierdie vierkant nou as die basis van 'n reghoekige prisma met 'n hoogte van $4x$ meter gebruik word, bepaal die maksimum volume van die reghoekige prisma. (7)
- [9]

(Mei/Junie 2022)

VRAAG 8

- 8.1 Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels indien dit gegee word dat $f(x) = -x^2$. (5)
- 8.2 Bepaal:
- 8.2.1 $f'(x)$, indien dit gegee word dat $f(x) = 4x^3 - 5x^2$ (2)
- 8.2.2 $D_x \left[\frac{-6\sqrt[3]{x} + 2}{x^4} \right]$ (4)
- [11]

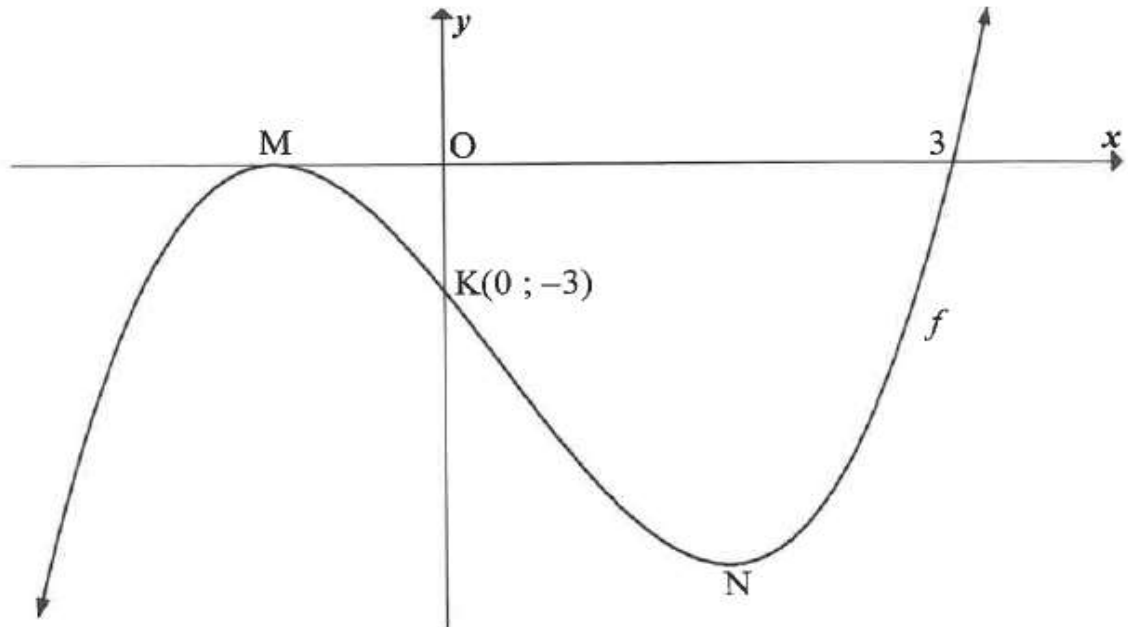
VRAAG 9

Die grafiek van $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ is hieronder geskets.

Die x -afsnitte van f is by $(3; 0)$ en M , waar M op die negatiewe x -as lê.

$K(0; -3)$ is die y -afsnit van f .

M en N is die draaipunte van f .



- 9.1 Toon dat die vergelyking van f gegee word deur $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$. (5)
- 9.2 Bereken die koördinate van N . (5)
- 9.3 Vir watter waardes van x sal:
- 9.3.1 $f(x) < 0$ (2)
- 9.3.2 f stygend wees (2)
- 9.3.3 f konkaaf op wees (3)
- 9.4 Bepaal die maksimum vertikale afstand tussen die grafieke van f en f' in die interval $-1 < x < 0$. (6)
- [23]

Telbeginsel en Waarskynlikheid*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 11**

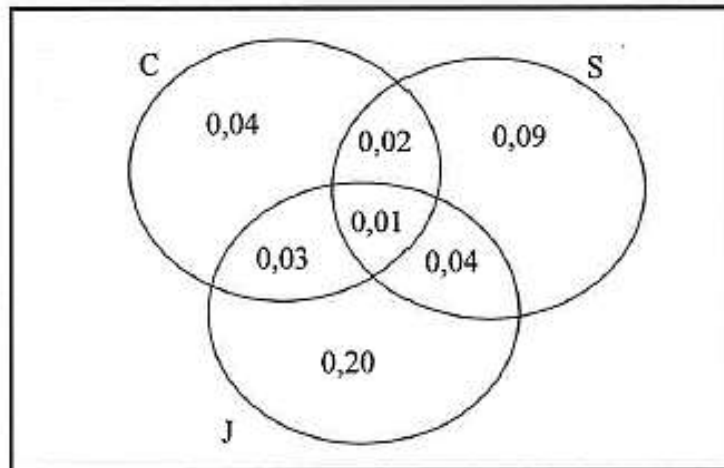
11.1 Twee gebeurtenisse, A en B, is sodanig dat:

- $P(A) = 0,4$
- $P(A \text{ of } B) = 0,52$
- A en B is onderling uitsluitend

Bepaal $P(B)$.

(2)

11.2 Die items wat 'n leerder oor 'n sekere tydperk by 'n snoepwinkel gekoop het, is aangeteken. Die waarskynlikheid dat die leerder 'n toebroodjie (S), 'n sjokolade (C) en 'n vrugtesap (J) koop, word in die Venn-diagram hieronder voorgestel.



11.2.1 Wat is die waarskynlikheid dat die leerder 'n toebroodjie sal koop?

(1)

11.2.2 Bereken die waarskynlikheid dat die leerder ten minste twee van die drie items sal koop.

(2)

11.2.3 Bereken die waarskynlikheid dat die leerder NIE een van die drie items sal koop NIE.

(2)

11.3 Sewe kitaarspelers, elkeen met 'n ander naam, neem aan 'n konsert deel.

- 11.3.1 Op hoeveel verskillende maniere kan die name van die kitaarspelers onder mekaar in die program gelys word? (1)
- 11.3.2 Na die vertoning wag die kitaarspelers agter die verhoog. Daar is 'n bankie met plek vir slegs vier om op te sit.
- Wat sal die waarskynlikheid wees dat die vier kitaarspelers in alfabetiese volgorde, van links na regs, sal sit? (3)
- 11.3.3 Gedurende die vertoning sit die sewe kitaarspelers in 'n ry op die verhoog. Vier kitaarspelers is vroulik en drie is manlik.
- Op hoeveel verskillende maniere kan die spelers sit indien die mans nie langs mekaar mag sit nie? (3)
- [14]

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 10**

10.1 'n Groep mense het aan 'n toets deelgeneem om 'n nuwe hoofpynpil te toets.

- 50% van die deelnemers het die hoofpynpil ontvang.
- 50% van die deelnemers het 'n suikerpil ontvang.
- $\frac{2}{5}$ van die groep wat die hoofpynpil ontvang het, is nie genees nie.
- $\frac{3}{10}$ van die groep wat die suikerpil ontvang het, is genees.

10.1.1 Stel die gegewe inligting op 'n boomdiagram voor. Dui op jou grafiek die waarskynlikheid wat met elke tak geassosieer word, asook die uitkomst, aan. (3)

10.1.2 Bepaal die waarskynlikheid dat 'n persoon wat willekeurig uit die groep gekies is, NIE genees sal word NIE. (2)

10.2 Drie gebeurtenisse, A, B en C, word in ag geneem:

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{en} \quad P(A \text{ of } B) = \frac{13}{20}.$$

10.2.1 Is gebeurtenisse A en B onderling uitsluitend? Ondersteun jou antwoord met die nodige berekeninge. (2)

10.2.2 Bepaal $P(\text{net } C)$, indien dit verder gegee word dat
 $P(A \text{ of } C) = \frac{7}{10}$, $P(A \text{ en } C) = \frac{2}{5}$ en $2P(B \text{ en } C) = P(A \text{ en } C)$. (3)

10.2.3 Bepaal die waarskynlikheid dat gebeurtenisse A, B of C NIE plaasvind NIE. (2)

10.3 Sewe vriende (4 seuns en 3 dogters) wil in 'n reghoek langs mekaar staan om 'n foto te neem.

10.3.1 Op hoeveel maniere kan die 3 dogters langs mekaar in die foto staan? (2)

10.3.2 In die volgende foto, bepaal die waarskynlikheid dat Selwyn ('n seun) en Lindiwe ('n dogter) NIE langs mekaar in die foto sal staan NIE. (3)

[17]

(Mei/Junie 2022)

VRAAG 10

- 10.1 Vlae van vier Afrika-lande en drie Europese lande is tydens die 2021 Olimpiese Spele in 'n ry vertoon.

Bepaal:

- 10.1.1 Die totale getal maniere waarop al 7 vlae van hierdie lande vertoon kan word (2)

- 10.1.2 Die waarskynlikheid dat die vlae van die Afrika-lande langs mekaar vertoon is (3)

- 10.2 A en B is twee onafhanklike gebeurtenisse.

$$P(A) = 0,4 \text{ en } P(A \text{ of } B) = 0,88$$

Bereken $P(B)$. (3)

- 10.3 Daar is 120 passasiers aan boord van 'n vliegtuig. Passasiers het 'n keuse tussen 'n vleistoebroodjie of 'n kaastoebroodjie, maar meer passasiers sal 'n vleistoebroodjie kies. Daar is slegs 120 toebroodjies beskikbaar om uit te kies. Die waarskynlikheid dat die eerste passasier 'n vleistoebroodjie sal kies en die tweede passasier 'n kaastoebroodjie, is $\frac{18}{85}$. Bereken die waarskynlikheid dat die eerste passasier 'n kaastoebroodjie sal kies. (5)

[13]

AFDELING 3: Vraestel 2

Inhoud en Eksamenriglyne

STATISTIEK EN REGRESSIE**Maatstawwe van Sentrale Neiging vir Ongegroepeerde Data**

$\text{Gemiddelde} = \frac{\text{som van al die waardes}}{\text{totale aantal waardes}}$ $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	Waar: \bar{x} = gemiddelde $\sum x$ = som van al die waardes n = aantal waardes
---	--

Modus

Die modus is die waarde/getal wat die mees gereeld in datastel voorkom.

Mediaan

Die mediaan is die middel getal in die datastel. Posisie van die mediaan = $\frac{1}{2}(n+1)$

N.B Data moet in stygende volgorde rangskik word voordat die mediaan bepaal word.

Omvang as 'n Maatstaf van Verspreiding

Omvang = Grootste Waarde – Kleinste Waarde

Maatstawwe van Sentrale Neiging vir Gegroepeerde Data

Beraamde Gemiddelde $= \frac{\sum f \cdot x_i}{\sum f}$	$f \rightarrow$ frekwensie $x_i \rightarrow$ die klas middelpunt Berekening van x_i $x_i = \frac{1}{2}(\text{onderste klaslimiet} + \text{boonste klaslimiet})$
Modale Klas	Die klas met die hoogste frekwensie

Klas met Mediaan

- Posisie van mediaan vir gegroepeerde data $\rightarrow \frac{1}{2}n$
- Berekening van klas met mediaan \rightarrow tel die frekwensies van bo o m die klas met die mediaan te vind.:

Time(hours)	Frequency	
$0 \leq x < 1$	5	↓ 5 values
$1 \leq x < 2$	9	↓ 14 values
$2 \leq x < 3$	12	↓ 26 values
$3 \leq x < 4$	6	
$n = \sum f = 32$		

The median lies here

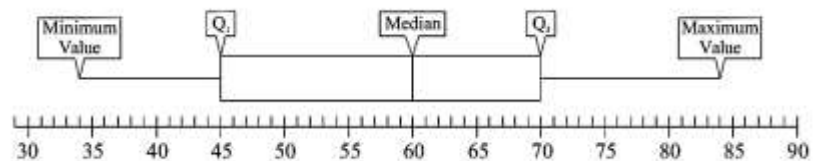
N.B posisie van mediaan $= \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(32) = 16$

Vyf-getal-opsomming en Mond-en-Snordigram**VYF GETAL OPSOMMING**

1. Minimum-waarde
2. Onderste-kwartiel (Q_1)
3. Mediaan (Q_2)
4. Boonste-kwartiel (Q_3)
5. Maksimum-waarde

MOND-EN-SNORDIAGRAM

'n Mond-en-Snordigram is 'n visuele voorstelling van die vyf-getal-opsomming.

**Identifisering van Uitskieters**

- Enige data item wat:

Minder is as $Q_1 - 1,5 \times \text{IKW}$ OF

Meer is as $Q_3 + 1,5 \times \text{IKW}$,

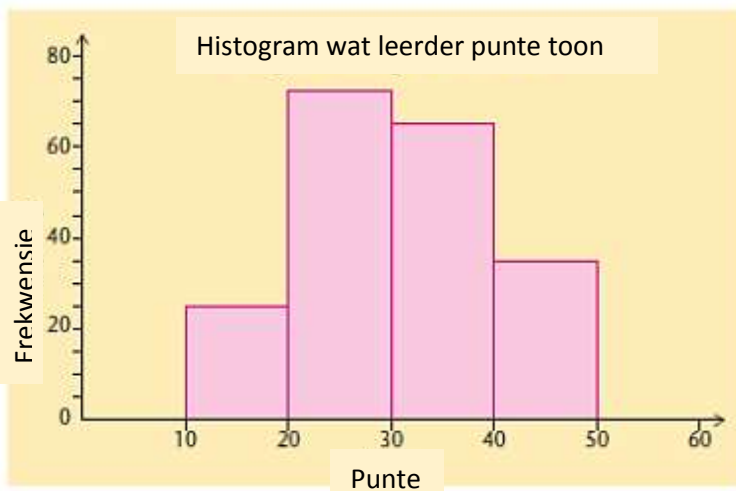
is 'n uitskieter.

Histogramme

'n Histogram gee 'n visuele interpretasie van **GEGROEPEERDE DATA**. Dit is soortgelyk aan 'n staafgrafiek, maar daar is **GEEN** gapings/spasies tussen die stawe nie.

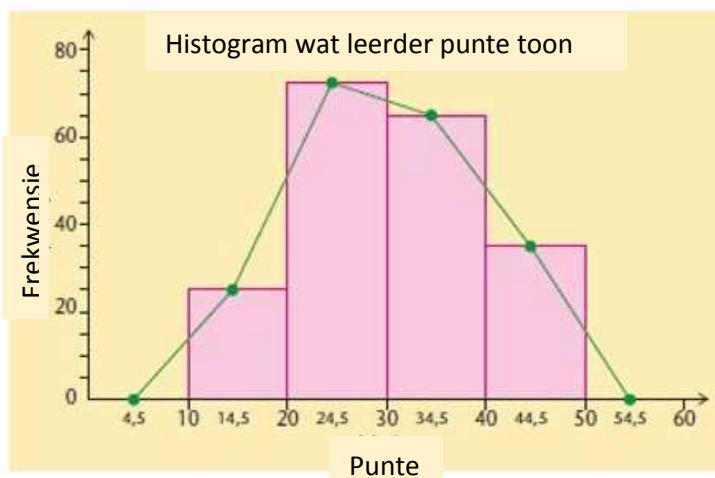
Vir 'n HISTOGRAM – SLUIT DIE VOLGENDE IN.

- Titel aan bokant om te beskryf wat die histogram voorstel.
- Groep/Klas intervalle op die x -as
- Frekwensie op die y -as
- Stawe met geen gapings tussen-in nie

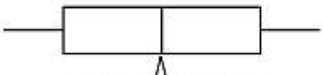

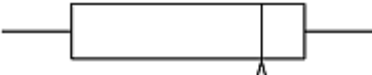
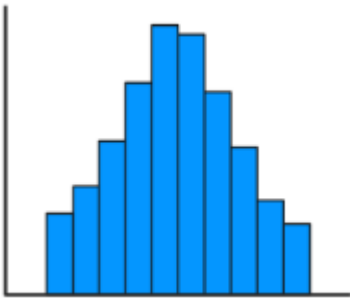
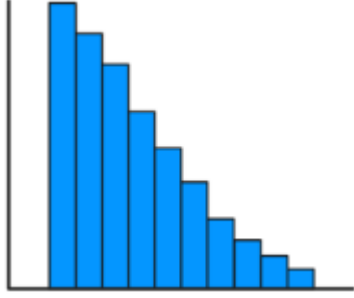
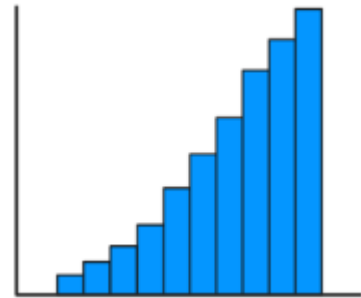
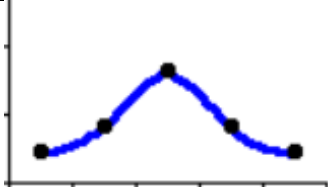
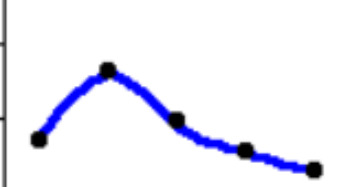
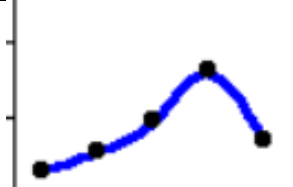


Frekwensie Veelhoeke

Word geteken vanaf 'n HISTOGRAM deur die middelpunte van die bokant van die kolomme van die histogram te verbind. By die eindpunte, verleng die lyn na die middelpunte van die klas onder laer waardes en die middelpunt van die klas bo die boonste waarde om x -as te raak. (**ge-anker**)



Verspreiding van die Data

Simmetries	Positief Skeef (Skeef na Regs)	Negatief Skeef (Skeef na Links)
 <p>Mediaan in die middel van die “mond” en die snorre is dieselfde.</p>	 <p>Mediaan is nader aan Q_1</p>	 <p>Mediaan is nader aan Q_3</p>
		
		
Gemiddelde = Mediaan	Gemiddelde > Mediaan	Gemiddelde < Mediaan

Ogiewe (Kumulatiewe Frekwensie Kurwes)

Om die **kumulatiewe frekwensie** te vind,

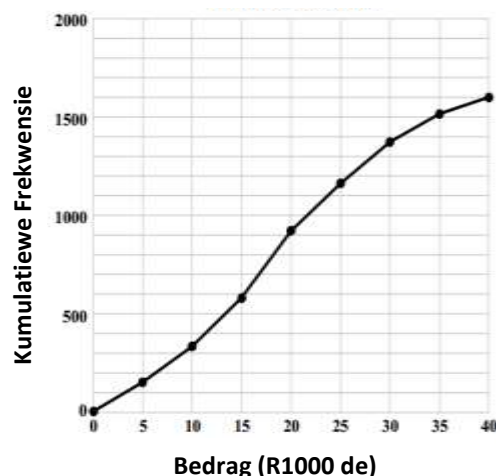
- Tel die frekwensies op soos jy op die frekwensie tabel af gaan.
- Die laaste waarde van die **kumulatiewe frekwensie** moet gelyk wees aan die som van al die frekwensies.

Onthou altyd wanneer jy 'n kumulatiewe frekwensie kurwe teken dat die punte wat afgesteek moet word is die boonste-klas grens teenoor die kumulatiewe frekwensie.

Bedrag ge-eis (R1000 de)	Boonsteklas Grens	Aantal Eise (frekwensie)	Kumulatiewe Frekwensie	Punte om af te steek
-----------------------------	----------------------	-----------------------------	---------------------------	-------------------------

Amount Claimed (R1000s)	Upper Class Boundary	No. of Claims (frequency)	Cumulative Frequency	Points to Plot
	0	0	0	(0 ; 0)
$0 < x \leq 5$	5	150	150	(5 ; 150)
$5 < x \leq 10$	10	190	340	(10 ; 340)
$10 < x \leq 15$	15	250	590	(15 ; 590)
$15 < x \leq 20$	20	320	910	(20 ; 910)
$20 < x \leq 25$	25	260	1170	(25 ; 1170)
$25 < x \leq 30$	30	210	1380	(30 ; 1380)
$30 < x \leq 35$	35	140	1520	(35 ; 1520)
$35 < x \leq 40$	40	80	1600	(40 ; 1600)

**“Worry Less” Versekerings Maatskappy
Eise vir 2007**



Variansie en Standaardafwyking van Ongegroepeerde Data

- Standaardafwyking is 'n maatstaf van verspreiding (verspreiding van data) rondom die gemiddelde.
- Standaardafwyking = $\sqrt{\text{Variansie}}$
 - Daarom is, Variansie die $(\text{standaardafwyking})^2$

Ons gebruik die volgende simbool vir standaardafwyking $\rightarrow \sigma$

N.B Gebruik altyd 'n sakrekenaar om variansie of standaardafwyking te bereken

Interpretasie van Standaardafwyking

- Hoe groter die standaardafwyking \rightarrow Hoe meer is die data versprei
- Hoe kleiner die standaardafwyking \rightarrow Hoe minder is die data versprei
- Een Standaardafwyking Interval $\rightarrow (\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$
- Twee Standaardafwyking Interval $\rightarrow (\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma)$

**Voorbeeld (Berekening van gemiddelde en standaardafwyking
(Ongegroepeerde data))**

Gegee die data in die tabel hieronder, bepaal die gemiddelde en standaardafwyking:

x	2	5	7
-----	---	---	---

Oplossing:

In die volgende stappe gebruik ons 'n sakrekenaar: **CASIO fx-82ZA PLUS II**

Stap 1	Druk Mode knoppie	
Stap 2	Druk nommer 2 vir STAT	
Stap 3	Kies 1-VAR deur nommer 1 te druk	
Stap 4	In die X-kolom, tik alle x-waardes in, een na die ander deur = te druk na elke invoer.	
Stap 5	Druk die AC knppie \rightarrow Druk die SHIFT knoppie \rightarrow druk nommer 1	
Stap 6	Kies Var deur die nommer 4 te druk	
Stap 7	Druk die nommer 2 gevolg deur = om die gemiddelde te kry en druk die nommer 3 gevolg deur = om die standaardafwyking te kry. N.B Nadat elke waarde gekry is, moet stappe 5 – 6 herhaal word om die waarde om die waarde in stap 7 te kry. Druk die AC knoppie na elke waarde gekry is.	Gemiddelde = 4,67 Standaardafwyking = 2,05

N.B om terug te gaan na die normale (Comp. mode), druk MODE knoppie gevolg deur die nommer 1

Voorbeeld (Berekening van gemiddelde en standaardafwyking (Gegroepeerde data))

Gegee die data in die tabel hieronder, bepaal die beraamde gemiddelde en die standaardafwyking:

Klas	Frekwensie
$5 < x \leq 10$	4
$10 < x \leq 15$	5
$15 < x \leq 20$	8

Oplossing:

Klas	Frekwensie	x_i (klas middelpunt)
$5 < x \leq 10$	4	7,5
$10 < x \leq 15$	5	12,5
$15 < x \leq 20$	8	17,5

In die volgende stappe word 'n sakrekenaar gebruik: **CASIO fx-82ZA PLUS II**

Stap 1	Omdat ons met gegroepeerde data werk, moet on seers die frekwensie funksie soos volg aan skakel Druk SHIFT → MODE → Down Arrow (vanaf REPLAY knoppie) → Kies STAT deur 3 te druk → B Choose ON deur 1 te druk.	
Stap 2	Druk MODE → Kies STAT deur 2 te druk	1:1-VAR 2:A+BX 3:Y+CX ² 4:1n X 5:0^X 6:A*B^X 7:A*X^B 8:1/X
Stap 3	Kies 1-VAR deur nommer 1 te druk	STAT 0 X FREQ
Stap 4	In die X-kolom, tik al die klas middelpunt waardes in, een na die ander deur = te druk na elke waarde. Skuif dan na die Frekwensie kolom en tik ooreenkomstige frekwensies in.	STAT 0 X 7,5 FREQ 4 12,5 5 17,5
Stap 5	Druk AC knoppie → Druk SHIFT knoppie → Druk die nommer 1	1:Type 2:Data 3:Sum 4:Var 5:MinMax
Stap 6	Kies Var deur die nommer 4 knoppie te druk	1:n 2: \bar{x} 3: σx 4:sx
Stap 7	Druk die nommer 2 gevolg deur die = om die geskatte gemiddelde te kry en druk die nommer 3 gevolg deur die = om die geskatte standaardafwyking te kry. N.B Nadat elke waarde gekry is, moet jy stappe 5 – 6 herhaal om die waarde in stap 7 te kry. Druk die AC knoppie nadat elke waarde gekry is.	Geskatte Gemiddelde = 13,68 Geskatte Standaardafwyking = 4,03

N.B om die frekwensie af te skakel, volg Stap 1 (maar kies 2 om AF te skakel)

N.B om terug tot die “normal (Comp.) mode” te gaan, drul **MODE** knoppie gevolg deur die nommer **1**

Regressielyn (Lyn van beste passing of Die kleinste kwadrate-lyn)

Formule om die voorspelde y –waarde (\hat{y}) te vind: $\hat{y} = a + bx$

N.B Gebruik 'n sakrekenaar om die waardes van a en b te vind.

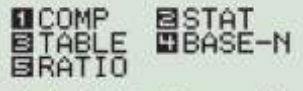
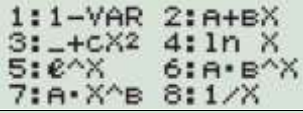
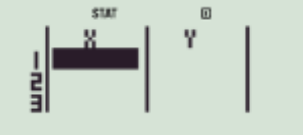
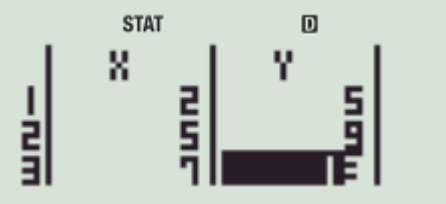
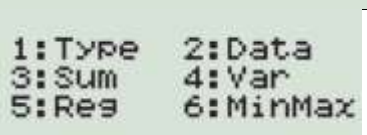
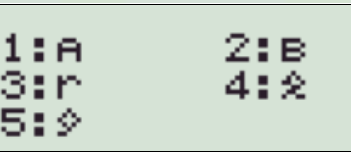
Voorbeeld (Bepaling van die vergelyking van die regressielyn)

Gegee die data in die tabel hieronder, bepaal die vergelyking van die lyn van beste passing:

x	2	5	7
y	5	9	13

Oplossing:

In die volgende stappe word 'n sakrekenaar gebruik: **CASIO fx-82ZA PLUS II**

Stap 1	Druk Mode knoppie	
Stap 2	Druk nommer 2 vir STAT	
Stap 3	Kies opsie 2: A+BX deur nommer 2 te druk	
Stap 4	In die X-kolom, tik al die x-waardes, een na die ander in deur = te druk na elke waarde. Skuif dan na die Y-kolom, tik al die y-waardes, een na die ander in deur = te druk na elke waarde.	
Stap 5	Druk AC knoppie → Druk SHIFT knoppie → Druk die nommer 1	
Stap 6	Kies 5:Reg deur die nommer 5 te druk	
Stap 7	Druk die nommer 1 gevolg deur = om die waarde van A te kry, en druk dan die nommer 2 gevolg deur = om die waarde van B te kry. Jy kan ook die waarde van r (korrelasie-koëffisiënt) kry. N.B Nadat elke waarde gekry is, moet jy stappe 5 – 6 herhaal om die waarde in stap 7 te kry. Druk AC knoppie nadat jy elke waarde kry.	$A = 1,63$ $B = 1,58$ $r = 0,99$

Die vergelyking van die lyn van beste passing is dan: $\hat{y} = 1,63 + 1,58x$

N.B om terug na die “normal (Comp.) mode” te gaan, druk **MODE** knoppie gevolg deur nommer **1**

Om die lyn van beste passing te teken.***Benadering/metode 1***

Vervang enige twee x –waardes vanaf die tabel om die voorspelde y –waardes te kry. Steek die punte af en verbind hulle.

N.B Verseker dat jou lyn lank genoeg is om die datastel te dek.

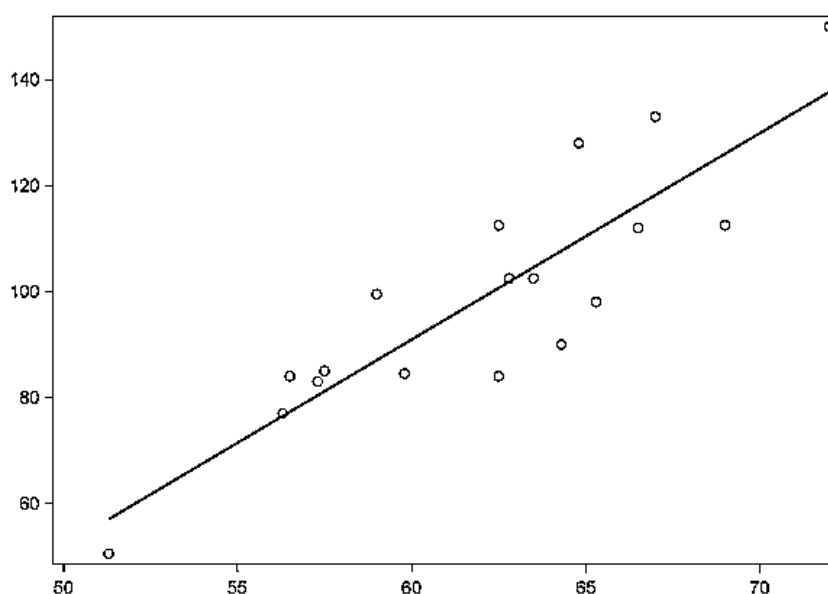
Benadering/metode 2

Bepaal die gemiddelde punt en die y -afsnit, verbind dan die twee punte.

Om die gemiddelde punt te bepaal, gebruik die voorbeeld op die vorige bladsy, volg stappe 1 – 5, en daarna die volgende stappe:

Stap 6	Kies 4:Var deur die nommer 4 te druk	<div> <div>1:n</div> <div>3:σ_x</div> <div>5:ȳ</div> <div>7:s_y</div> </div> <div> <div>2:ȳ</div> <div>4:s_x</div> <div>6:σ_y</div> </div>
Stap 7	Druk die nommer 2 gevolg deur = om die gemiddelde vir x te kry, en druk dan die nommer 5 gevolg deur = om die gemiddelde vir y te kry. N.B Nadat elke waarde gekry word, moet jy stappe 5 – 6 herhaal om die waarde in stap 7 te kry. Druk die AC knoppie nadat jy elke waarde kry.	$\bar{x} = 4,67$ $\bar{y} = 9$ \therefore gemiddelde punt is (4,67 ; 9)

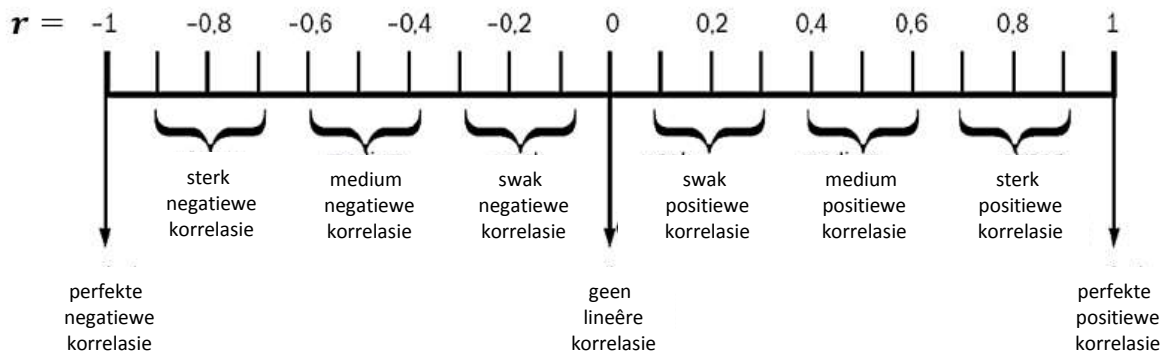
N.B Wanneer die lyn van beste passing geteken word, verseker dat die lyn lank genoeg is om die rooster te dek, sien hieronder:

Lineêre Regressie

Korrelasie Koëffisiënt

- Korrelasie koëffisiënt (r) dui die sterkte van die verhouding tussen die twee veranderlikes aan.
- Gebruik sakrekenaar om r te bereken (*Sien voorbeeld op bladsy 80*).
- $-1 \leq r \leq 1$

Lees/Beskrywing van Korrelasie Koëffisiënt



Eksamenriglyne (Statistiek)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

STATISTIEK

- Kandidate moet aangemoedig word om die sakrekenaar te gebruik by die berekening van standaardafwyking, variansie en die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn.
- Interpretasie van die standaardafwyking in terme van die normaalverspreiding is nie eksamineerbaar nie.
- Daar word van kandidate verwag om uitskieters intuïtief by spreidiagram en die mond-en-snordigram te identifiseer. In die geval van die mond-en-snordigram word data wat buite die interval (onderste kwartiel – 1,5 IQR; boonste kwartiel + 1,5 IQR) val as uitskieters beskou. Kandidate sal egter nie gepenaliseer word as hulle nie van hierdie formule gebruik maak om uitskieters te identifiseer nie.

ANALITIESE MEETKUNDE**Reguitlyne**

- ① Distance formula:
- Afstand formule**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- ② Midpoint formula:
- Middelpunt formule**

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Die gradiënt / helling van 'n lyn

- ③ The gradient / slope of a line:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{or} \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

order is very important!
You HAVE to use the
same order in the numerator
and denominator.

This line is increasing.
It has a positive gradient.
Hierdie lyn is stygend.
Dit het 'n positiewe gradiënt

This line is decreasing.
It has a negative gradient.
Hierdie lyn is dalend.
Dit het 'n negatiewe gradiënt

- ④ The equation of a straight line:
- Die vergelyking van 'n reguitlyn**

'n Reguitlyn se vergelyking word in hierdie vorm geskryf:

$$y = mx + c$$

gradiënt

$$y = mx + c$$

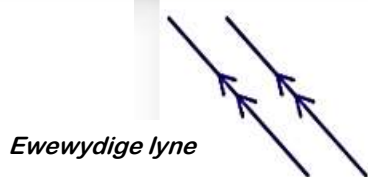
gradiënt gradient y-intercept
y-afsnit

or

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

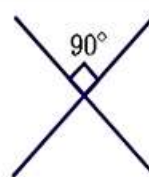
gradient
a point on the line
(x₁, y₁)

'n punt op die lyn
(x₁ ; y₁)



Ewewydige lyne

Parallel Lines



Loodregte lyne

Perpendicular Lines

Ewewydige lyne

=> dieselfde
gradiënte

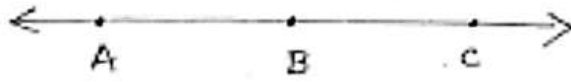
$$\therefore m_1 = m_2$$

Loodregte lyne

=> Produk van
gradiënte = -1

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1$$

Kollineêre/Saamlynige punte → Twee of meer punte is saamlynig as al die punte op dieselfde reguitlyn lê.

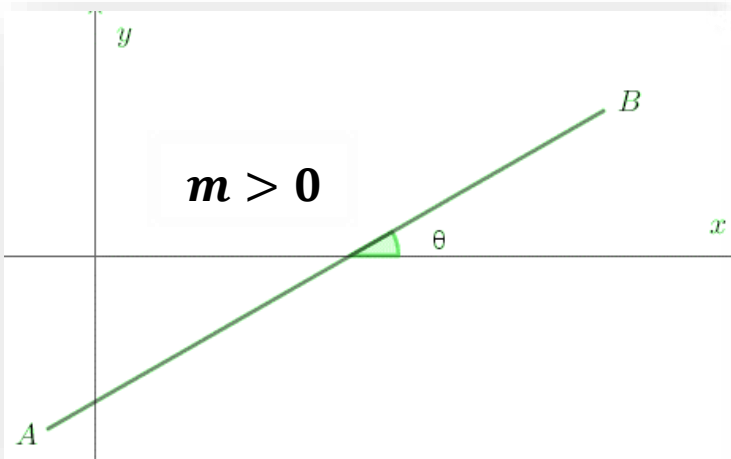


Op hierdie lyn is A, B en C saamlynige punte

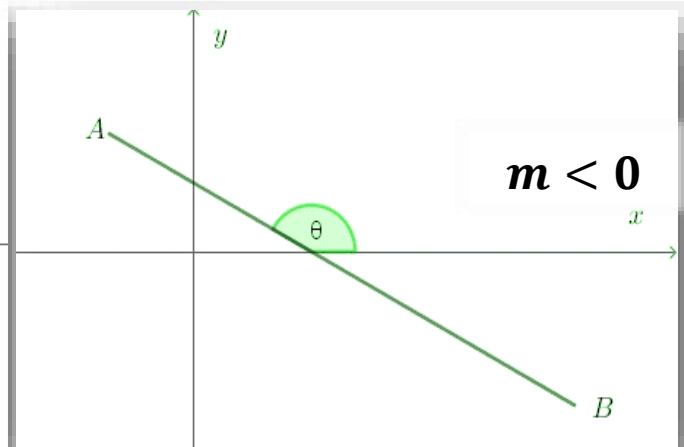
$$\therefore m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Inklinasie van 'n lyn

$$m = \tan \theta$$

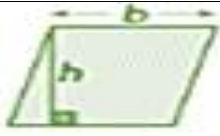
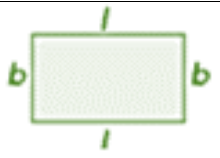
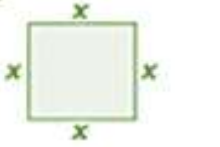
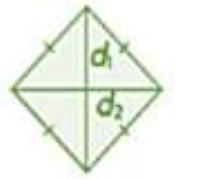

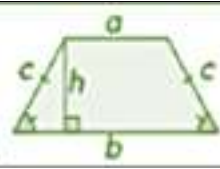


$$\theta = \tan^{-1}(m)$$



$$\theta = \tan^{-1}(m) + 180^\circ$$

Eienskappe van Vierhoeke

Vierhoek	Vorm	Eienskappe	Oppervlakte
Parallelogram		<ul style="list-style-type: none"> • Teenoorstaande sye ewewydig • Teenoorstaande sye gelyk • Teenoorstaande hoeke gelyk • Hoeklyne halveer mekaar 	$b \times h$
Reghoek		<ul style="list-style-type: none"> • Al die eienskappe van parallelogram • Alle hoeke is reghoeke • Hoeklyne is gelyk 	$l \times b$
Vierkant		<ul style="list-style-type: none"> • Al die eienskappe van reghoek • Alle sye gelyk • Hoeklyne halveer loodreg • Hoeklyne halveer die hoeke 	x^2
Ruit/Rombus		<ul style="list-style-type: none"> • Al die eienskappe van parallelogram • Alle sye is gelyk • Hoeklyne halveer loodreg • Hoeklyne halveer die hoeke 	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
Vlieër		<ul style="list-style-type: none"> • Twee pare aangrensende sye is gelyk • Een paar teenoorstaande hoeke is gelyk. • Een hoeklyn halveer die ander loodreg • Een hoeklyn halveer hoeke 	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
Trapezium		Een paar teenoorstaande sye ewewydig	$\frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

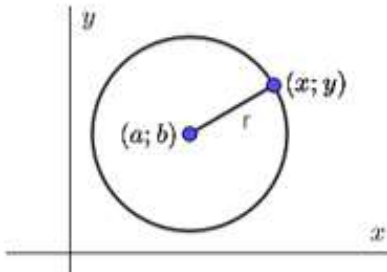
Vergelyking van 'n Sirkel

Standaardvorm

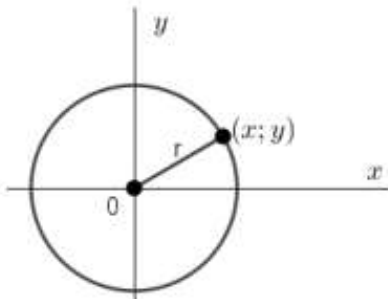
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Middelpunt = $(a; b)$

$$\text{radius} = \sqrt{r^2} = r$$



Middelpunt by oorsprong $(0; 0) : x^2 + y^2 = r^2$



Algemene vorm

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Gegee die vergelyking van die sirkel: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 7 = 0$

Bepaal die middelpunt en die radius:

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y = -7$$

$$x^2 - 6x + (\quad)^2 + y^2 + 8y + (\quad)^2 = -7 + (\quad)^2 + (\quad)^2$$

$$x^2 - 6x + (-3)^2 + y^2 + 8y + (4)^2 = -7 + (-3)^2 + (4)^2$$

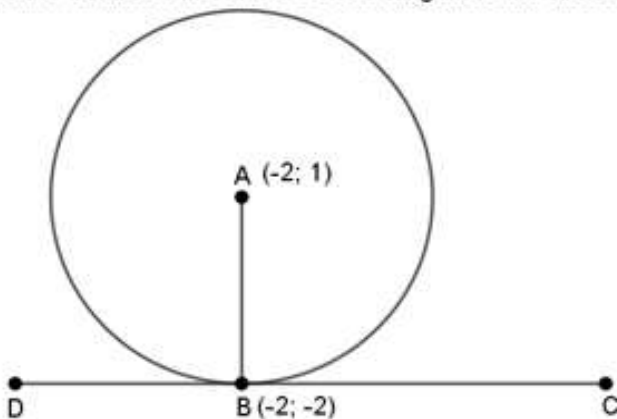
$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 18$$

$$\text{centre} = (3; -4)$$

$$\text{radius} = 3\sqrt{2}$$

Bepaling van die vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

A is the Centre of the circle. DC is a tangent to the circle at B.



1. Determine the gradient of the radius AB

2. $AB \perp DC$ (tangent \perp radius)

3. Determine the gradient of tangent DC

$$m_1 \times m_2 = -1$$

4. Then find the equation of the tangent DC

$$y = mx + c$$

A is die Middelpunt van die sirkel, DC is 'n raaklyn aan die sirkel by B.

1. Bepaal die gradiënt van die radius AB

2. $AB \perp DC$ (raaklyn \perp radius)

3. Bepaal die gradiënt van die raaklyn DC

$$m_1 \times m_2 = -1$$

4. Vind dan die vergelyking van die raaklyn DC

$$y = mx + c$$

Eksamenriglyne (Analitiese Meetkunde)

Bron: Wiskunde Eksamenriglyne Graad 12, 2021

ANALITIESE MEETKUNDE

1. Bewys van die eienskappe van veelhoeke deur middel van analitiese meetkunde.
2. Begrip van die konsep, saamlynigheid.
3. Daar word van kandidate verwag om Euklidiese Meetkunde stellings en aksiomas in Analitiese Meetkunde probleme te integreer.
4. Die lengte van 'n raaklyn, vanaf 'n punt buite die sirkel, moet bereken kan word.
5. Konsepte wat samelopenheid behels, sal nie geëksamineer word nie.

TRIGONOMETRIE

FORMULES VIR TRIGONOMETRIE

Word voorsien op inligtingsblad

$$\text{In } \triangle ABC: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad \text{area } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

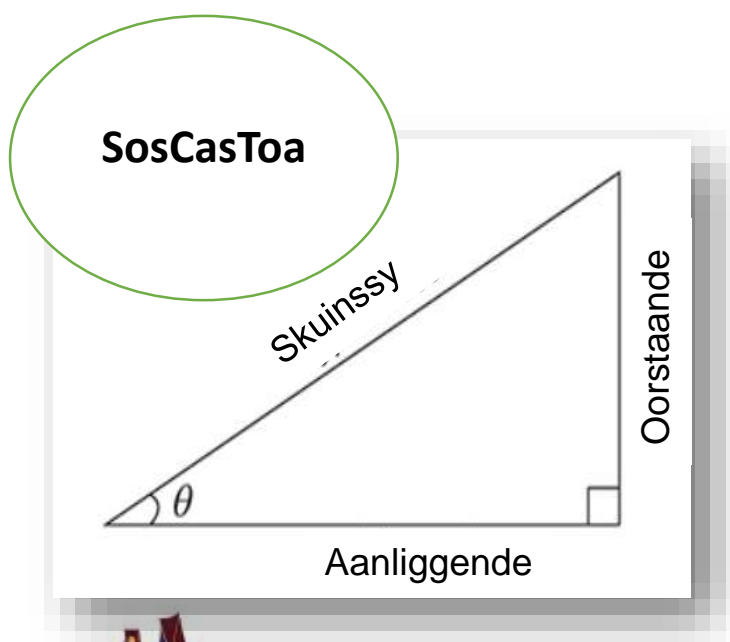
Word NIE op inligtingsblad voorsien nie

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

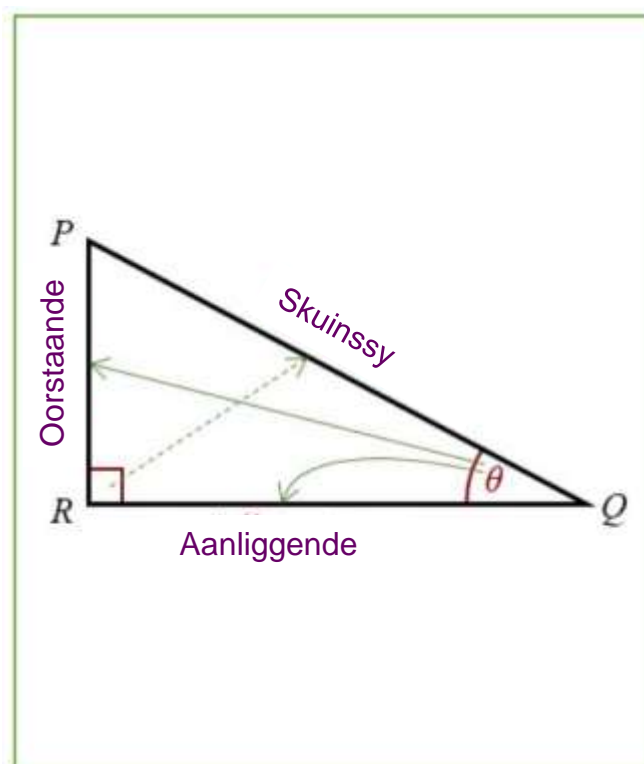
Reghoekige Driehoek



$$\sin \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{skuinssy}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{aanliggende}}{\text{skuinssy}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{aanliggende}}$$

Stelling van Pythagoras

N.B: Die Stelling van Pythagoras


$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

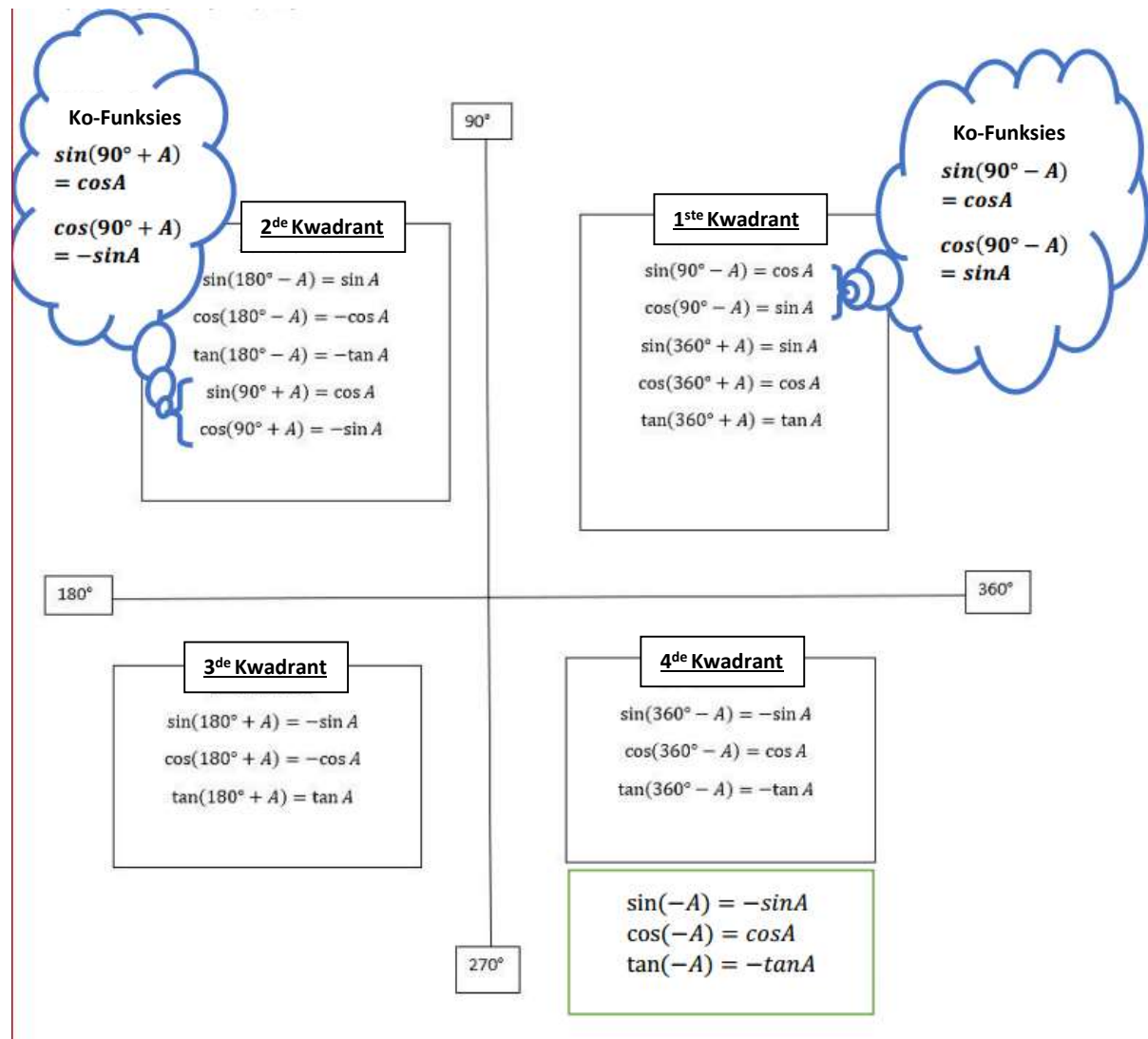
(Die Skuinssy kwadraat is gelyk aan die som van die kwadrate van die ander twee sye.)

N.B: Stelling van Pythagoras (in terme van x , y en r)

$$x^2 + y^2 = r^2$$

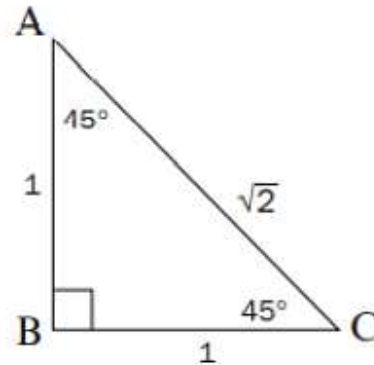
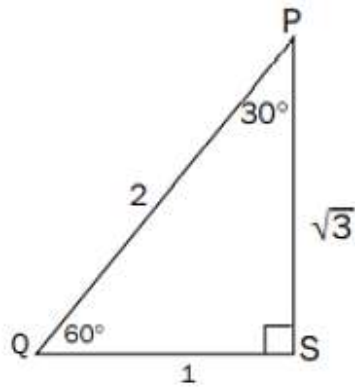
Reduksie Formules

Kwadrant 1 Sin +ve Cos +ve Tan +ve Alle	Kwadrant 2 Sin +ve Cos –ve Tan –ve Stoute (sin)	Kwadrant 3 Sin –ve Cos –ve Tan +ve Tieners (tan)	Kwadrant 4 Sin –ve Cos +ve Tan –ve Chat (cos)
 <p>Geheuerympie om jou te help onthou</p>			

Die reduksie formules

Spesiale Hoeke

Die volgende is verhoudings van spesiale hoeke (30° , 45° en 60°)



As jy dit moeilik vind om die diagramme te onthou, leer dan hierdie opsomming van die spesiale hoeke.

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Identiteite

Graad 11 Hersiening

Die kwadraat identiteit formule	Die kwosient identiteit formule
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

N.B:

Die formules hierbo sal nie op die inligtingsblad gegee word nie; jy moet dit leer en onthou

Graad 12 Identiteite (voorsien op die inligtingsblad)

Saamgestelde hoek Formules	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
Dubbelhoek Formules	$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$ $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

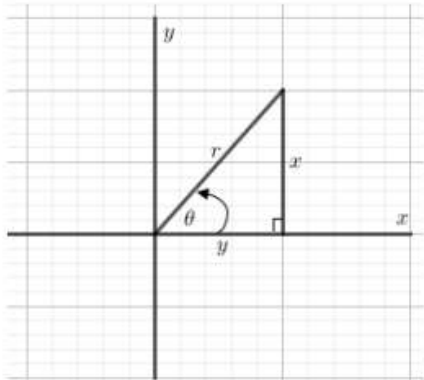
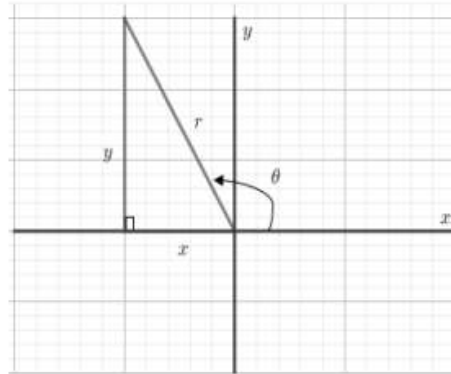
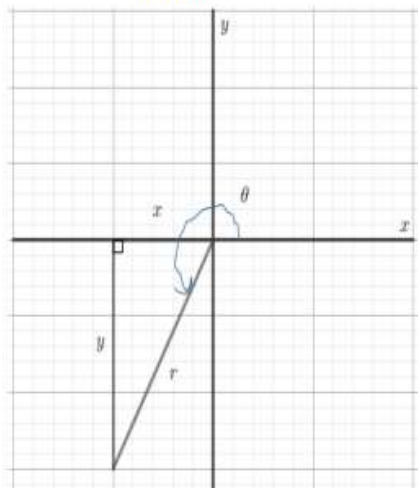
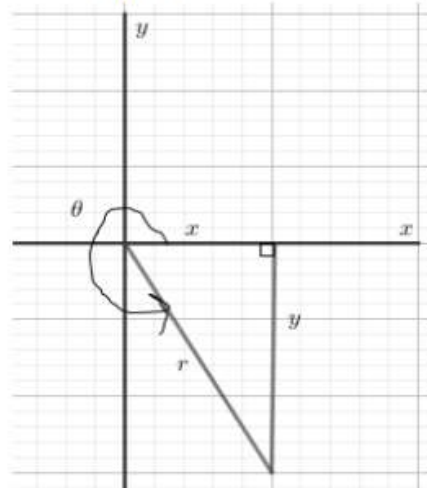
N.B: as jy vrae kry met dubbel- en saamgestelde- hoeke met die tan-verhouding, gebruik die kwosient identiteit formule

$$1. \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$2. \tan (A - B) = \frac{\sin(A - B)}{\cos(A - B)}$$

Cartesiesevlak

N.B: θ is 'n hoek wat gemeet word vanaf die positiewe x-as tot die arm (radius)

Kwadrant 1**Kwadrant 2****Kwadrant 3****Kwadrant 4**

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

N.B: Stelling van Pythagoras

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Verhoudings met 'n Letter

Voorbeeld 1

As $\sin 31^\circ = p$ bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, die volgende in terme van p :

- a. $\sin 149^\circ$
- b. $\cos(-59^\circ)$
- c. $\cos 62^\circ$
- d. $\sin 59^\circ$

Gebruik die reduksie formule:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin 149^\circ &= \sin(180^\circ - 31^\circ) \\ &= \sin 31^\circ\end{aligned}$$

Oplossing

Metode 1

a. $\sin 149^\circ = \sin 31^\circ = p$

b. $\cos(-59^\circ) = \cos 59^\circ = \sin 31^\circ = p$

c. $\cos 62^\circ = 1 - 2 \sin^2 31^\circ = 1 - 2p^2$

Gebruik die reduksie formule:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos 59^\circ &= \cos(90^\circ - 31^\circ) \\ &= \sin 31^\circ\end{aligned}$$

Gebruik die dubbelhoek formule:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos 62^\circ &= \cos 2(31^\circ) \\ &= 1 - 2 \sin^2 31^\circ\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}\sin^2 59^\circ + \cos^2 59^\circ &= 1 \\ \sin^2 59^\circ &= 1 - \cos^2 59^\circ \\ \sin 59^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 59^\circ} \\ \sin 59^\circ &= \sqrt{1 - p^2}\end{aligned}$$

Ons het alreeds in *b* getoon dat

$$\begin{aligned}\cos 59^\circ &= \sin 31^\circ = p \\ \therefore \cos^2 59^\circ &= p^2\end{aligned}$$

Trigonometriese Vergelykings

Gebruik die volgende formules om die algemene oplossings van trigonometriese vergelykings te bepaal:

As $\sin \alpha = m$

Neem kennis dat, wanneer trigonometriese vergelykings opgelos word, nadat die trigonometriese verhouding ge-isoleer is, in hierdie geval $\sin \alpha = m$, dan sal jy net oplossings hê/kry wanneer $-1 \leq m \leq 1$ (sien die moeder sinus-grafiek. MAAR wanneer $m > 1$ of $m < -1$, sal daar geen oplossing wees nie.

Formule:	$\alpha = \sin^{-1}(m) + k \cdot 360^\circ$ or $\alpha = 180^\circ - \sin^{-1}(m) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
Voorbeeld 1: bepaal die algemene oplossing van: $\sin x = \frac{1}{2}$	$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ$ or $x = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ$ $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ or $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
Voorbeeld 2: bepaal die algemene oplossing van: $\sin x = -\frac{1}{2}$	$x = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ$ or $x = 180^\circ - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ$ $x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$ or $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

As $\cos \alpha = m$

Neem kennis dat, wanneer trigonometriese vergelykings opgelos word, nadat die trigonometriese verhouding ge-isoleer is, in hierdie geval $\cos \alpha = m$, dan sal jy net oplossings hê/kry wanneer $-1 \leq m \leq 1$ (sien die moeder cosinus-grafiek. MAAR wanneer $m > 1$ of $m < -1$, sal daar geen oplossing wees nie.

Formule:	$\alpha = \cos^{-1}(m) + k \cdot 360^\circ$ or $\alpha = -\cos^{-1}(m) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
Voorbeeld 3: bepaal die algemene oplossing van: $\cos x = 1$	$x = \cos^{-1}(1) + k \cdot 360^\circ$ or $x = -\cos^{-1}(1) + k \cdot 360^\circ$ $x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$ or $x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$ $\therefore x = 0^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
Voorbeeld 4: bepaal die algemene oplossing van: $\cos x = -1$	$x = \cos^{-1}(-1) + k \cdot 360^\circ$ or $x = -\cos^{-1}(-1) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ $x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ or $x = -180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

As $\tan \alpha = m$

Formule:	$\alpha = \tan^{-1}(m) + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
Voorbeeld 5: bepaal die algemene oplossing van: $\tan x = 3$ (Rond antwoorde tot TWEE desimale plekke)	$x = \tan^{-1}(3) + k \cdot 180^\circ$ $x = 71,57^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
Voorbeeld 5: bepaal die algemene oplossing van: $\tan x = -3$ (Rond antwoorde tot TWEE desimale plekke)	$x = \tan^{-1}(-3) + k \cdot 180^\circ$ $x = -71,57^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

N.B: Jy mag ander metodes gebruik om die algemene oplossings te bepaal, die metode hierbo word egter aanbeveel.

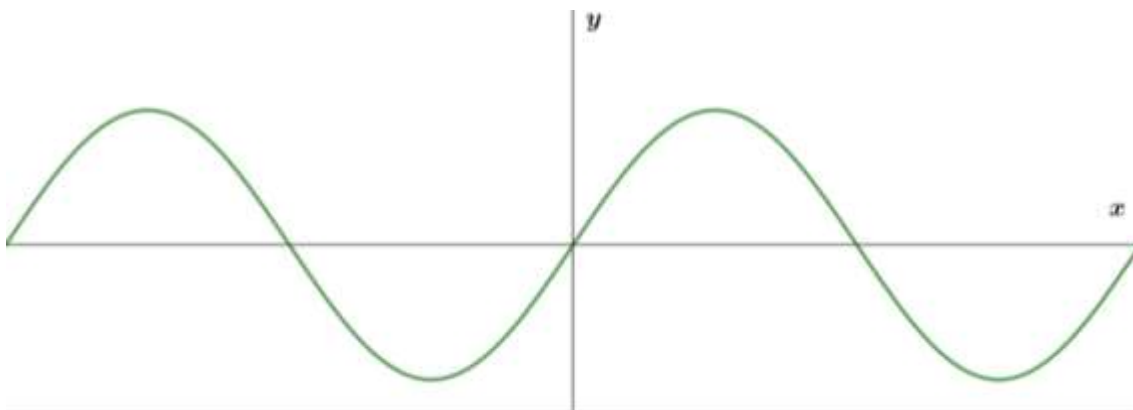
Trigonometriese Funksies

Opsomming van die Sinus-funksie: $y = a \sin k(x + p) + q$

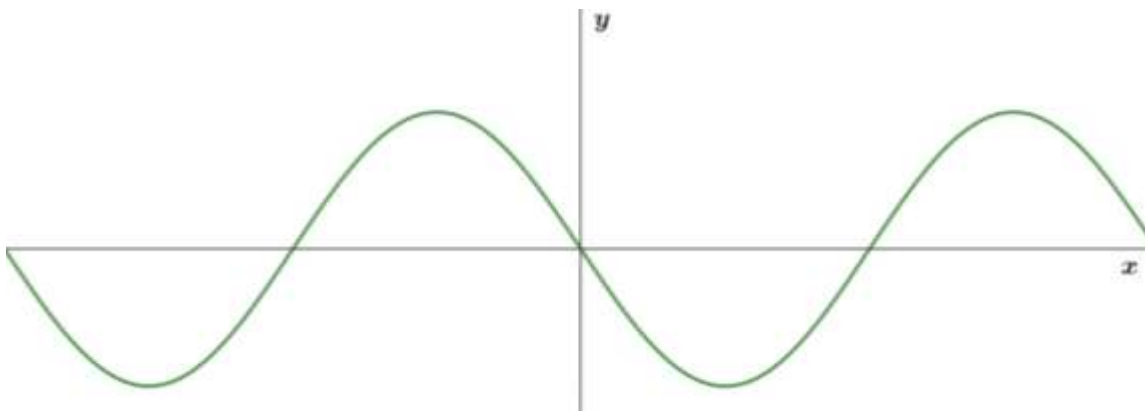
a → help vind amplitude
 k → help met period
 p → horisontale translasië
 q → vertikale translasië

- Vorm

$$a > 0$$



$$a < 0$$



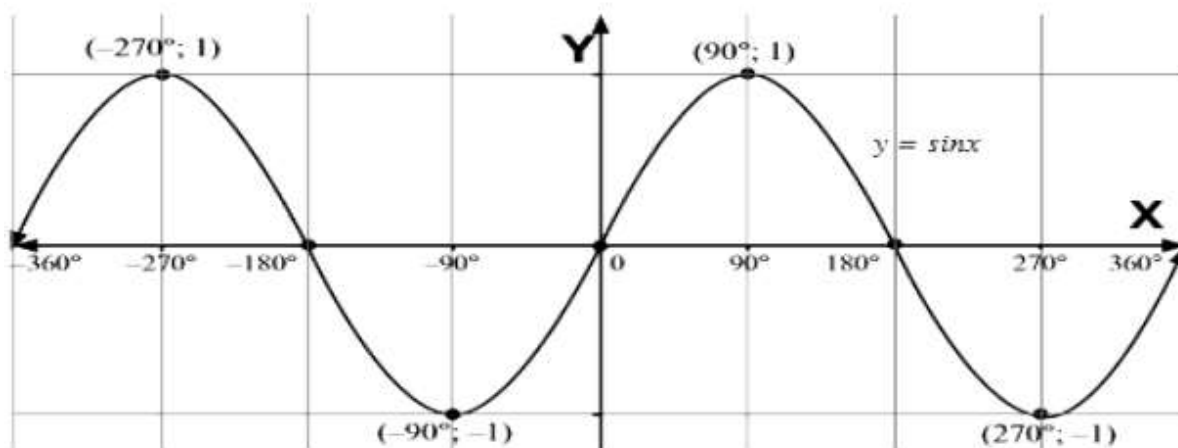
- Amplitude** – halfpad tussen die maksimum en die minimum → $\frac{\text{maks} - \text{min}}{2}$.
 - As $y = 2\sin x$, dan is die amplitude = 2
 - If $y = -3\sin x$, dan is die amplitude = 3
- Periode** = $\frac{360^\circ}{k}$
- p** → die horisontale skuif
 - As $y = \sin(x + 45^\circ)$ → skuif 45° na links
 - As $y = \sin(x - 30^\circ)$ → skuif 30° na regs
- q** → die vertikale skuif
 - As $y = \sin x + 3$ → skuif 3 eenhede op
 - As $y = \sin x - 2$ → skuif 2 eenhede af

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van: $y = \sin x$; vir $x \in [-360^\circ; 360^\circ]$

Oplossing

x	-360°	-270°	-180°	-90°	0°	90°	180°	270°	360°
y	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



Neem kennis van die volgende sleutel aspekte van die grafiek van
 $y = \sin x$ for $x \in [-360^\circ; 360^\circ]$

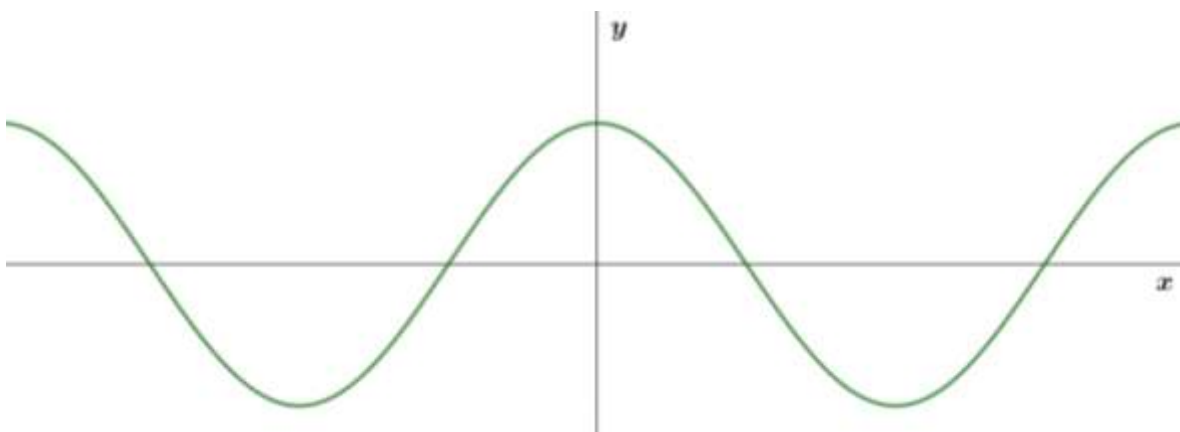
1	Maksimum-waarde	1 (by $x = -270^\circ$ en $x = 90^\circ$)
	Minimum-waarde	-1 (by $x = -90^\circ$ en $x = 270^\circ$)
2	Gebied	$x \in [-360^\circ; 360^\circ]$, $x \in \mathbb{R}$
	Terrein	$y \in [-1; 1]$, $y \in \mathbb{R}$
3	x -afsnitte	$-360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
	y -afsnitte	0
4	Amplitude	1 $\left\{ \frac{\text{maks} - \text{min}}{2} \rightarrow \frac{1 - (-1)}{2} = 1 \right\}$
5	Periode	360° $\{ \text{periode} = \frac{360^\circ}{k} \rightarrow \frac{360^\circ}{1} = 360^\circ \}$

Opsomming van kosinus funksie $y = a \cos k(x + p) + q$

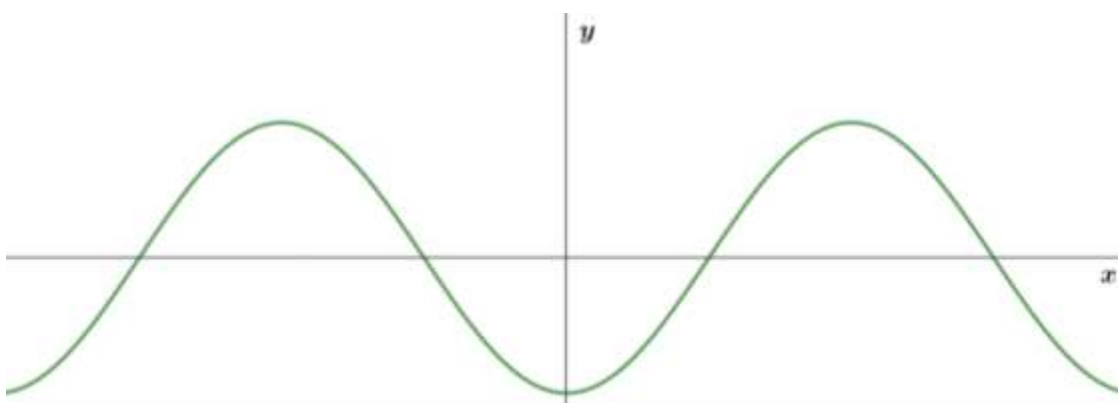
a help vind amplitude
 k help met periode
 p horisontale translasië
 q vertikale translasië

- Vorm

$$a > 0$$



$$a < 0$$



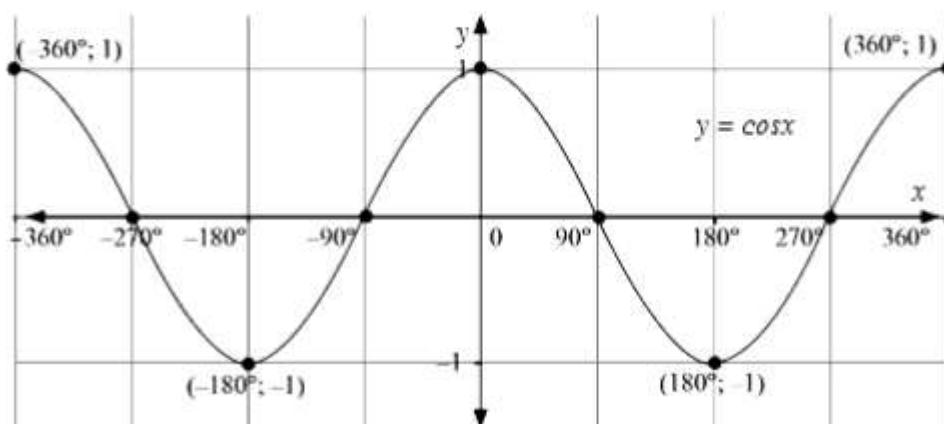
- Amplitude** – halfpad tussen die maksimum en die minimum $\rightarrow \frac{\text{maks} - \text{min}}{2}$
 - As $y = 2 \cos x$, dan is die amplitude = 2
 - If $y = -3 \cos x$, dan is die amplitude = 3
- Periode** = $\frac{360^\circ}{k}$
- p** \rightarrow die horisontale skuif
 - $y = \cos(x + 45^\circ) \rightarrow$ skuif 45° na links
 - $y = \cos(x - 30^\circ) \rightarrow$ skuif 30° na regs
- q** \rightarrow die vertikale skuif
 - $y = \cos x + 3 \rightarrow$ skuif 3 eenhede op
 - $y = \cos x - 2 \rightarrow$ skuif 2 eenhede af

Voorbeeld 2

Skets die grafiek van: $y = \cos x$; vir $x \in [-360^\circ; 360^\circ]$

Oplossing:

x	-360°	-270°	-180°	-90°	0°	90°	180°	270°	360°
y	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



Neem kennis van die volgende sleutel aspekte van die grafiek van:

$$y = \cos x \text{ ; vir } x \in [-360^\circ; 360^\circ]$$

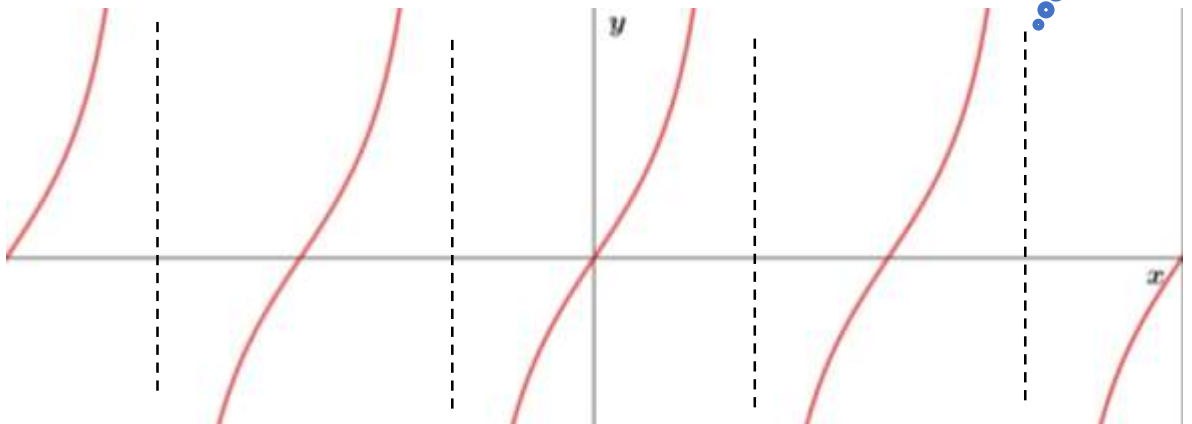
1	Maksimum-waarde	1 (by $x = -360^\circ, x = 0^\circ$ en $x = 360^\circ$)
	Minimum-waarde	-1 (by $x = -180^\circ$ en $x = 180^\circ$)
2	Gebied	$x \in [-360^\circ; 360^\circ], \quad x \in \mathbb{R}$
	Terrein	$y \in [-1; 1], \quad y \in \mathbb{R}$
3	x -afsnitte	$-270^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ$
	y -afsnitte	1
4	Amplitude	1 $\left\{ \frac{\text{maks} - \text{min}}{2} \rightarrow \frac{1 - (-1)}{2} = 1 \right\}$
5	Period	$360^\circ \quad \left\{ \text{periode} = \frac{360^\circ}{k} \rightarrow \frac{360^\circ}{1} = 360^\circ \right\}$

Opsomming van die tan-funksie $y = a \tan k(x + p) + q$

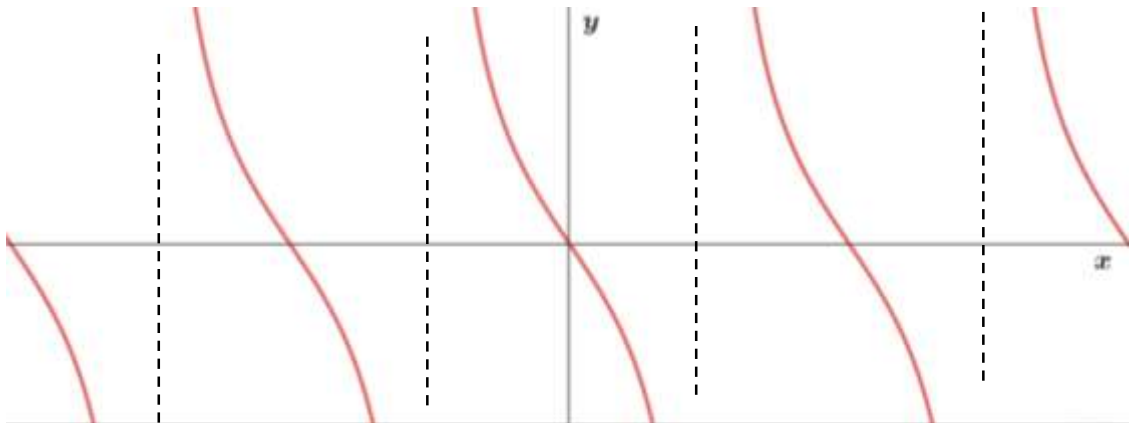
a : help met helling punt
 k : help met periode
 p : horisontale translasië
 q : vertikale translasië

- Vorm

$$a > 0$$



$$a < 0$$



- Amplitude** – tan-grafiek het nie 'n maksimum of minimum-waarde nie, dus is daar NIE AMPLITUDE vir die tan-funksie nie.
- Asimptote**
 - Posisies van die eerste asimptote is by $0^\circ \pm \frac{\text{periode}}{2}$
 - Dan, word die ander asimptote elke periode gevind.
- Periode** = $\frac{180^\circ}{k}$
- p** → die horisontale skuif
 - $y = \tan(x + 45^\circ) \rightarrow$ skuif 45° na links
 - $y = \tan(x - 30^\circ) \rightarrow$ skuif 30° na regs
- q** → die vertikale skuif
 - $y = \tan x + 3 \rightarrow$ skuif 3 eenhede op
 - $y = \tan x - 2 \rightarrow$ skuif 2 eenhede af

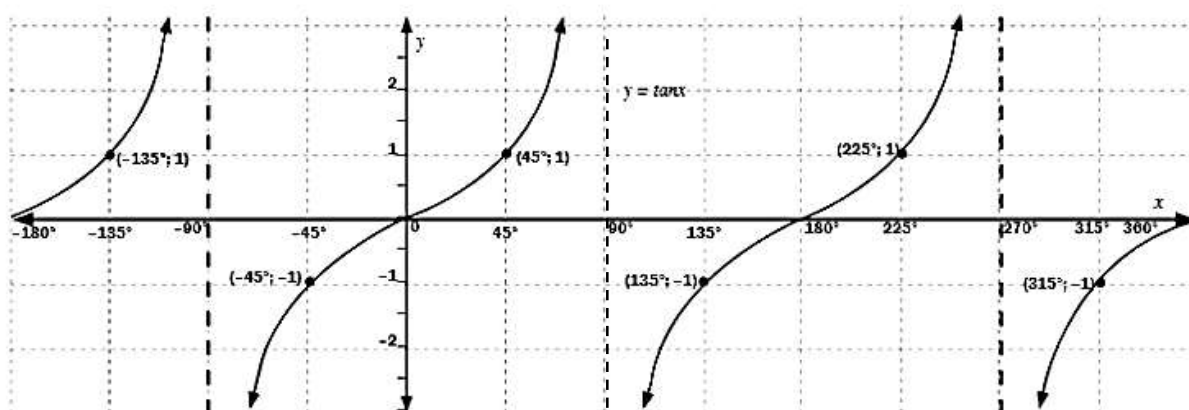
Voorbeeld 3

Skets die grafiek van: $y = \tan x$; vir $x \in [-180^\circ; 360^\circ]$

ongedefinieerd

Oplossing:

x	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
y	0	1	unde- fined	-1	0	1	unde- fined	-1	0	1	unde- fined	-1	0



Neem kennis van die volgende sleutel aspekte van die grafiek van:

$$y = \tan x ; \text{ vir } x \in [-180^\circ; 360^\circ]$$

1	Maksimum-waarde	N/A
	Minimum-waarde	N/A
2	Gebied	$x \in [-180^\circ; 360^\circ]$, but $x \neq -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ$
	Terrein	$y \in (-\infty; \infty), y \in R$
3	x -afsnit(te)	$-180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
	y -afsnit(te)	0
4	Amplitude	N/A
5	Periode	180° {period = $\frac{180^\circ}{k} \rightarrow \frac{180^\circ}{1} = 180^\circ$ }
6	Vergelykings van die asimptote	$x = -90^\circ, x = 90^\circ$, and $x = 270^\circ$
7	Helling punte	$(-135^\circ; 1), (-45^\circ; -1), (45^\circ; 1), (135^\circ; -1), (225^\circ; 1), (315^\circ; -1)$

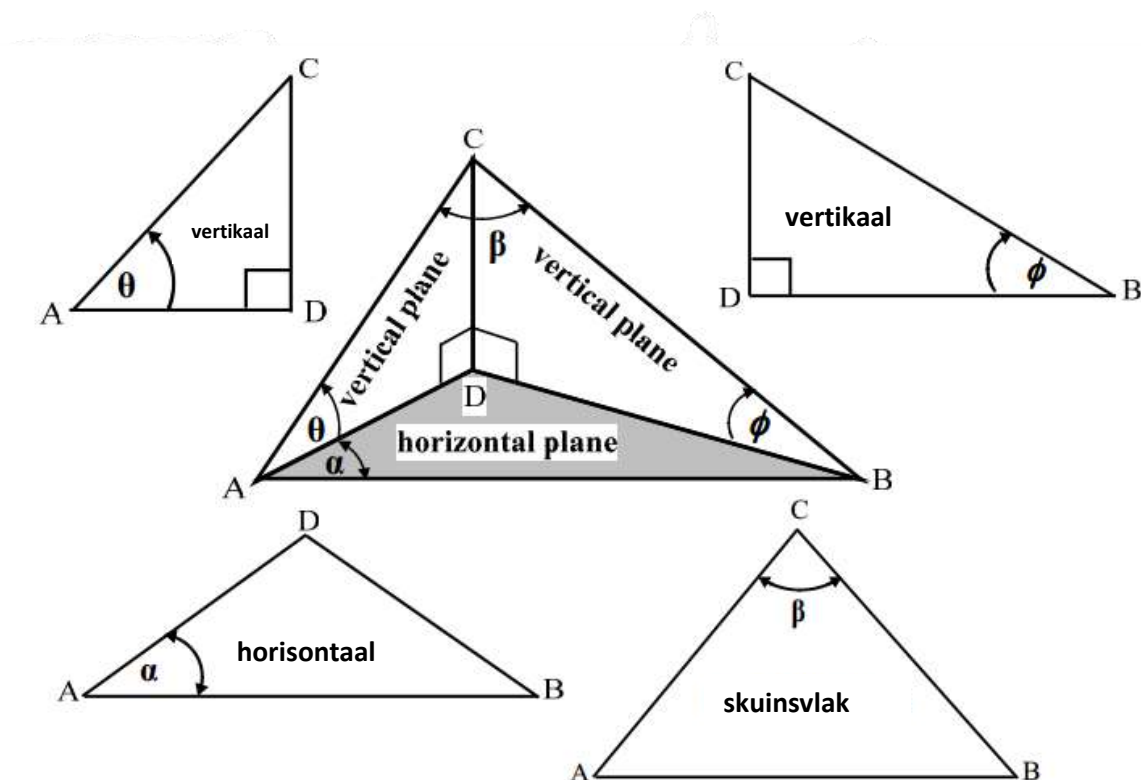
Oplossing van Driehoeke (2-D en 3-D)

3-dimensionele spasie beslaan 3 vlakke (horisontale-, vertikale- en skuinsvlak).

Die 3-dimensionele diagram hieronder is verdeel sodat jy apart op elke 2-D vlak kan werk.

Die 3-D diagram hieronder het 4 vlakke:

- Vertikale-vlak $\rightarrow \triangle ADC$
- Vertikale-vlak $\rightarrow \triangle BDC$
- Horisontale-vlak $\rightarrow \triangle ADB$
- Skuins-vlak $\rightarrow \triangle ABC$

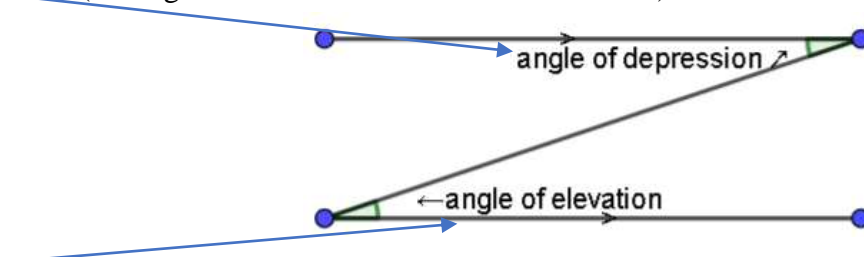


Neem kennis dat:

- Jy kan nie twee hoeke van verskillende vlakke optel om die som te kry nie, vanaf die 3-D diagram is, $\theta + \alpha \neq \angle CAB$

Hoogtehoek vs Dieptehoek

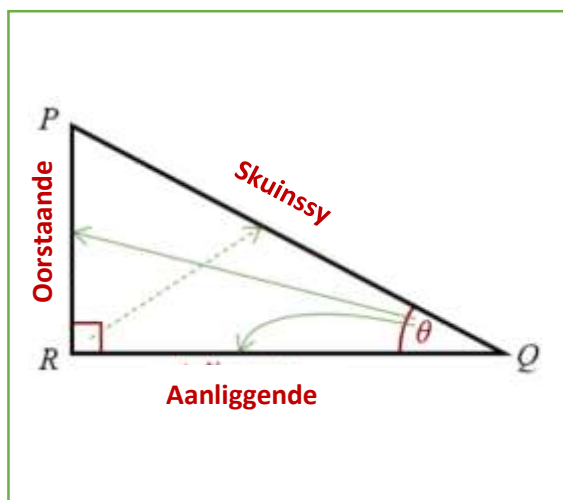
Dieptehoek (word gemeet vanaf horisontalevlak afwaarts)



Hoogtehoek (word gemeet vanaf horisontalevlak opwaarts)

Vir Reghoekige Driehoeke

SosCasToa



$$\text{sinus van hoek } \theta = \frac{\text{lengte van diesy oorkant } \theta}{\text{lengte van dieskuinssy}}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{skuinssy}}$$

$$\text{cosinus van hoek } \theta = \frac{\text{lengte van diesy langsaaan } \theta}{\text{lengte van dieskuinssy}}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\text{aanliggende}}{\text{skuinssy}}$$

$$\text{tan van hoek } \theta = \frac{\text{lengte van diesy oorkant } \theta}{\text{lengte van diesy langsaaan } \theta}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{aanliggende}}$$

Om die oppervlakte van 'n reghoekige driehoek PQR te bereken, gebruik die formule

$$\text{Area } \Delta = \frac{1}{2} b \times h$$

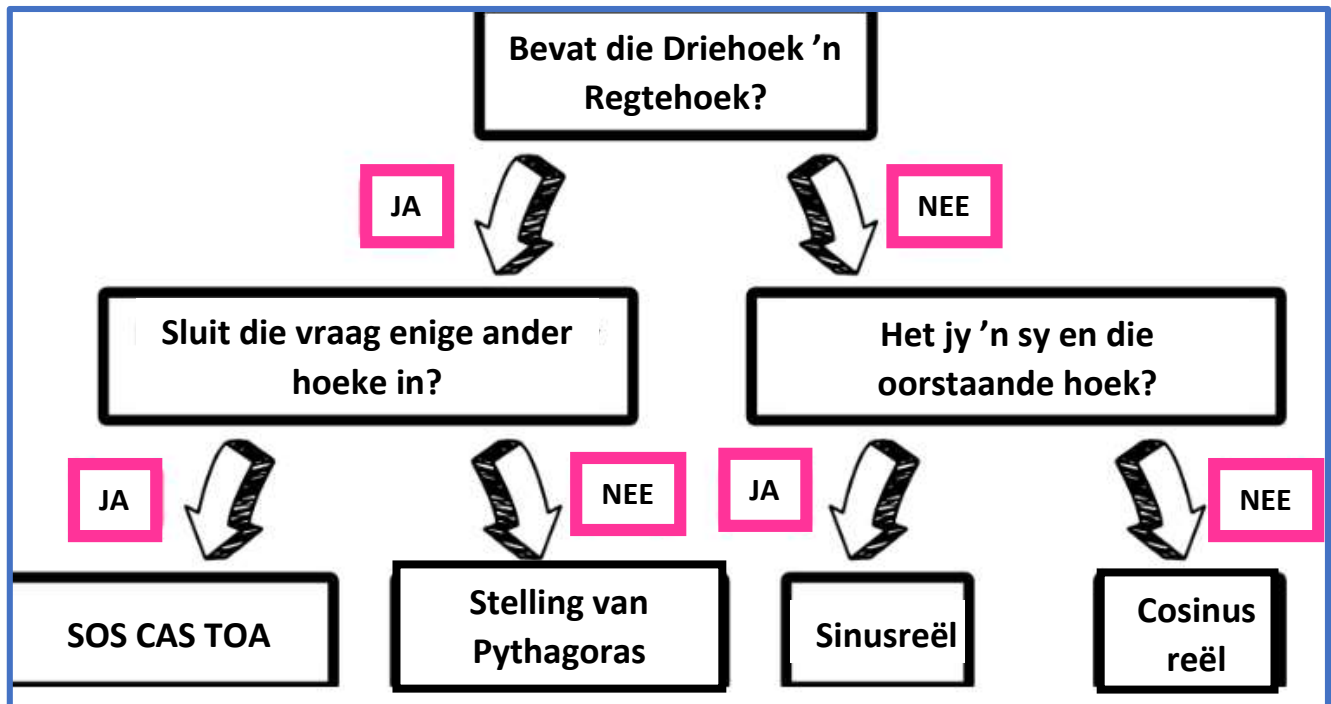
$$\therefore \text{Area } \Delta PQR = \frac{1}{2} RQ \times PR$$

Vir driehoeke wat nie reghoekige driehoeke is nie

Reël	Formule	Wanneer om te gebruik
Sinusreël	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	Gegee twee sye en 'n hoek teenoor een van die sye
		Een sy en enige twee hoeke
Cosinusreël	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	Gegee twee sye en 'n ingeslote hoek
		Drie sye
Oppervlakte-reël	$\text{Area} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$	Oppervlakte word verlang Om die formule vir area te gebruik, word twee sye en 'n ingeslote hoek benodig

N.B Gebruik slegs oppervlakte formule as jy gevra word om die oppervlakte te bereken of wanneer jy die oppervlakte gegee word.

2-D & 3-D Benadering



EUKLIDIESE MEETKUNDE

Eksamineerbare Stellings: Weet hoe om die volgende Stellings te Bewys

1. Die lyn getrek vanaf die middelpunt van die sirkel loodreg op 'n koord, halveer die koord.

Gegee: 'n Sirkel met middelpunt O
AB is 'n koord
P is 'n punt op AB
Sodat $OP \perp AB$

Te Bewys: $AP = PB$

Bewys:

Konstruksie: Trek OA en OB

In $\triangle OAP$ en $\triangle OBP$

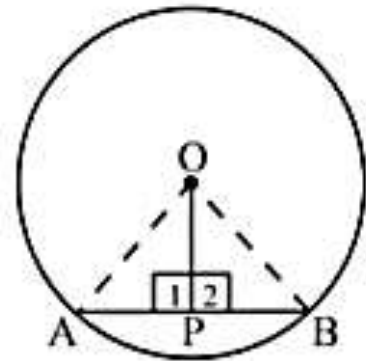
$OA = OB$ (radiusse)

$\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = 90^\circ$ (gegee)

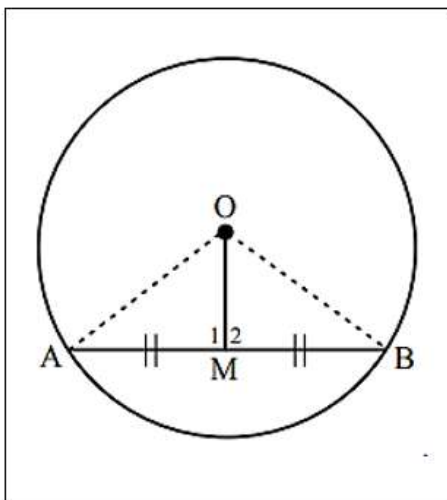
$OP = OP$ (gemene sy)

$\therefore \triangle OAP \equiv \triangle OBP$ (90° , Sk, S)

$\therefore AP = PB$ ($\equiv \Delta e$)



2. Die lyn getrek vanaf die middelpunt van die sirkel wat 'n koord halveer, is loodreg op die koord.



Gegee: 'n Sirkel met middelpunt O

Te Bewys: $OM \perp AB$

Bewys:

Konstruksie: Verbind OA en OB

In $\triangle OAM$ en $\triangle OBM$

(a) $OA = OB$ (radiusse)

(b) $AM = BM$ (gegee)

(c) $OM = OM$ (gemeen)

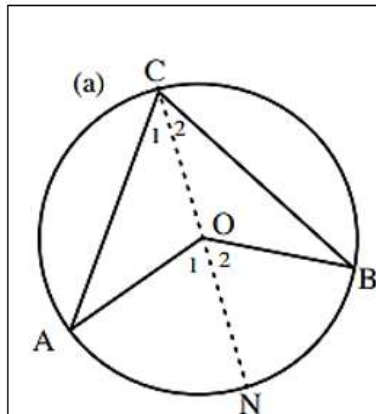
$\therefore \triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (S, S, S)

$\therefore \hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Maar AMB is 'n reguitlyn

$\therefore \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ (Aanliggend Supplementêre $\angle e$)

3. Die hoek in die middel van 'n sirkel wat onderspan word deur 'n boog, is dubbel die grootte van die hoek op die omtrek van die sirkel, wat deur dieselfde boog onderspan word (aan dieselfde kant van die boog as die middelpunt)



Gegee: 'n Sirkel met middelpunt O

Te Bewys: $\hat{AOB} = 2 \times \hat{ACB}$

Bewys:

Konstruksie: Verbind CO en verleng na N

$$\hat{O}_1 = \hat{C}_1 + \hat{A} \quad (\text{Buitede } \angle \text{ van } \triangle OAC)$$

$$\text{Maar, } \hat{C}_1 = \hat{A} \quad (OA = OC, \text{ radiusse})$$

$$\therefore \hat{O}_1 = 2\hat{C}_1$$

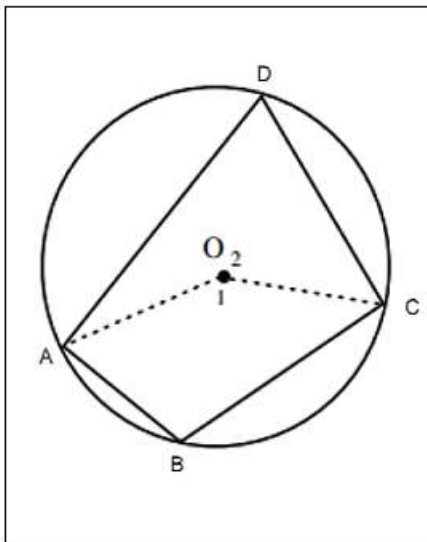
$$\text{Net so, in } \triangle OCB \text{ is } \hat{O}_2 = 2\hat{C}_2$$

$$\therefore \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{C}_1 + 2\hat{C}_2$$

$$\therefore \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2(\hat{C}_1 + \hat{C}_2)$$

$$\therefore \hat{AOB} = 2\hat{ACB}$$

4. Die teenoorstaande hoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr.



Gegee: 'n Sirkel met middelpunt O

Te Bewys: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ en $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

Bewys:

Konstruksie: Verbind AO en OC

$$\hat{O}_1 = 2 \times \hat{D} \quad (\text{Middelpunts } \angle = 2 \times \text{Omtreks } \angle)$$

$$\hat{O}_2 = 2 \times \hat{B} \quad (\text{Middelpunts } \angle = 2 \times \text{Omtreks } \angle)$$

$$\therefore \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{D} + 2\hat{B}$$

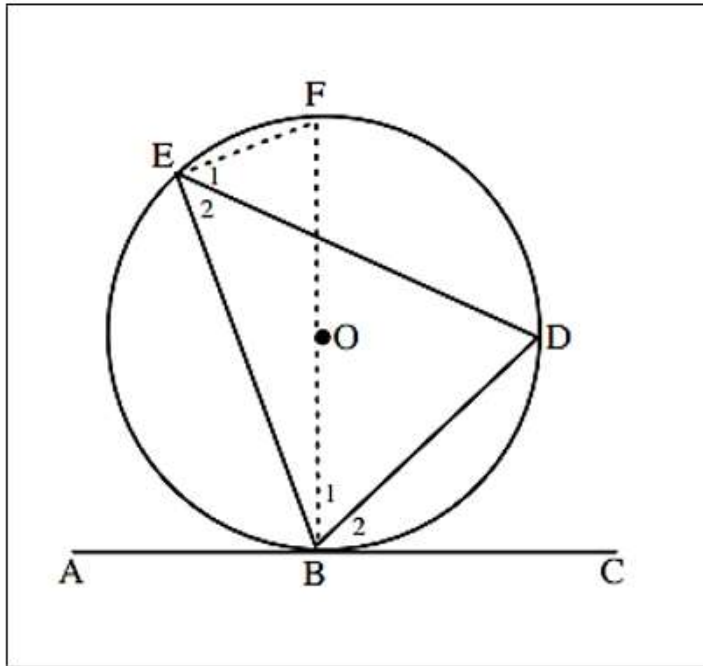
$$\text{En, } \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 360^\circ \quad (\angle \text{e rondom n punt})$$

$$\therefore 2\hat{D} + 2\hat{B} = 360^\circ$$

$$\therefore \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

Netso, deur BO en DO te verbind, kan dit bewys word dat $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$

5. Die hoek tussen die raaklyn aan 'n sirkel en die koord getrek vanaf die punt van kontak is gelyk aan die hoek in die teenoorstaande segment.



Gegee: 'n Sirkel met middelpunt O,
raaklyn ABC

Te Bewys: $\hat{C}BD = \hat{B}ED$

Bewys:

Konstruksie: Teken Middellyn BOF en verbind EF

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ \quad (\text{radius} \perp \text{raaklyn})$$

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 90^\circ \quad (\angle \text{in semi sirkel})$$

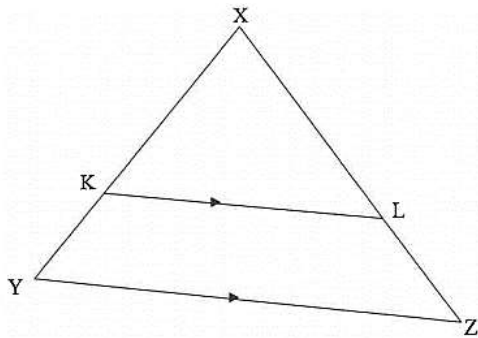
$$\text{maar, } \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \quad (FD \text{ onderspan} = \angle e)$$

$$\therefore \hat{B}_2 = \hat{E}_2$$

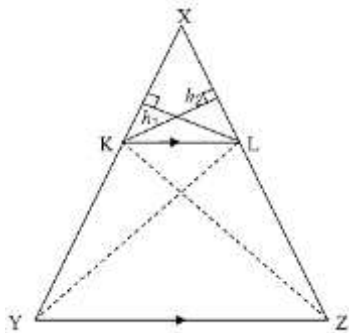
$$\therefore \hat{C}BD = \hat{B}ED$$

6. 'n Lyn getrek ewewydig aan een sy van 'n driehoek verdeel die ander twee sye eweredig.

As $KL \parallel YZ$, bewys dat $\frac{XK}{KY} = \frac{XL}{LZ}$



Bewys:



Konstruksie: Verbind KZ en LY en teken h_1 vanaf K \perp XL en h_2 vanaf L \perp XK

Bewys:

$$\frac{\text{area } \triangle XKL}{\text{area } \triangle LYK} = \frac{\frac{1}{2} XK \times h_1}{\frac{1}{2} KY \times h_1} = \frac{XK}{KY}$$

$$\frac{\text{area } \triangle XKL}{\text{area } \triangle KLZ} = \frac{\frac{1}{2} XL \times h_2}{\frac{1}{2} LZ \times h_2} = \frac{XL}{LZ}$$

$$\text{area } \triangle XKL = \text{area } \triangle XKL \quad (\text{gemeen})$$

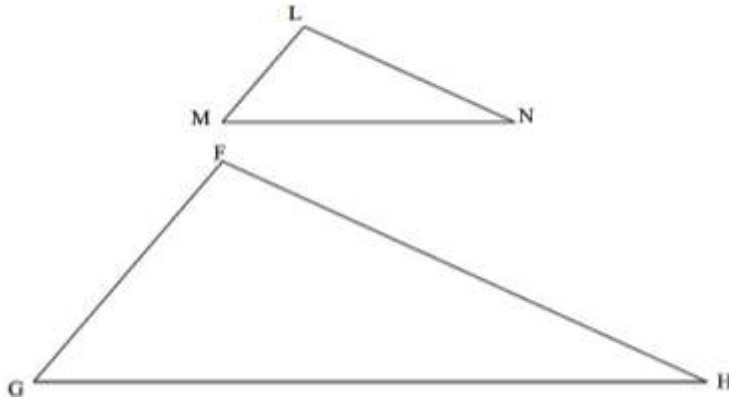
$$\text{Maar, } \text{area } \triangle LYK = \text{area } \triangle KLZ \quad (\text{dies basis en hoogte : } LK \parallel YZ)$$

$$\therefore \frac{\text{area } \triangle XKL}{\text{area } \triangle LYK} = \frac{\text{area } \triangle XKL}{\text{area } \triangle KLZ}$$

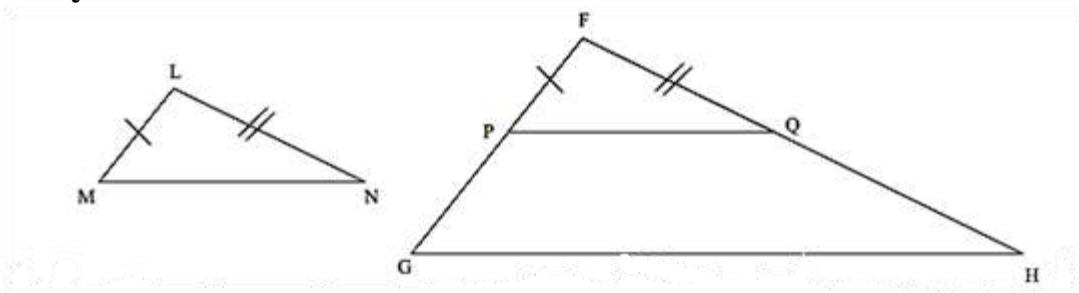
$$\therefore \frac{XK}{KY} = \frac{XL}{LZ}$$

7. Gelykhoekige driehoeke is gelykvormig.

As in $\triangle LMN$ en $\triangle FGH$ dit gegee word dat $\hat{L} = \hat{F}$ en $\hat{M} = \hat{G}$, bewys die Stelling wat meld $\frac{LM}{FG} = \frac{LN}{FH}$.



Bewys:



Konstruksie: Teken 'n punt P op FG sodat $FP = LM$ en 'n punt Q op FH sodat $FQ = LN$.

Bewys:

In $\triangle FPQ$ en $\triangle LMN$

1. $\hat{F} = \hat{L}$ (gegee)

2. $FP = LM$ (konstruksie)

3. $FQ = LN$ (konstruksie)

$\therefore \triangle FPQ \equiv \triangle LMN$ (SHS)

$\hat{FPQ} = \hat{LMN}$ ($\equiv \Delta e$)

Maar, $\hat{FGH} = \hat{LMN}$ (gegee)

$\hat{FPQ} = \hat{FGH}$

$PQ \parallel GH$ (ooreenkomstige hoeke =)

$\frac{FP}{FG} = \frac{FQ}{FH}$ ($PQ \parallel GH$; Ewaredigh.Stelling)

$\frac{LM}{FG} = \frac{LN}{FH}$

Aanvaarbare Redes: Euklidiese Meetkunde*Bron: Graad 12 Wiskunde Eksamenriglyne, 2021*

STELLING	AANVAARBARE REDE
LYNE	
Aangrensende hoeke op 'n reguitlyn is supplementêr.	\angle^e op reguit lyn
As aangrensende hoeke supplementêr is, lê die buitenste bene van die hoeke in 'n reguitlyn.	aangr. \angle^e suppl.
Die som van die aangrensende hoeke om 'n punt is 360° .	\angle^e om 'n punt OF \angle^e in 'n omw
Regoorstaande hoeke is gelyk.	regoorst. \angle^e
As $AB \parallel CD$, dan is die verwissellende hoeke gelyk	verw. \angle^e ; $AB \parallel CD$
As $AB \parallel CD$, dan is die ooreenkomstige hoeke gelyk.	ooreenk. \angle^e ; $AB \parallel CD$
As $AB \parallel CD$, dan is die ko-binnehoeke supplementêr.	ko-binne \angle^e ; $AB \parallel CD$
As die verwissellende hoeke tussen twee lyne gelyk is, dan is die lyne ewewydig.	verw. $\angle^e =$
As die ooreenkomstige hoeke tussen twee lyne gelyk is, dan is die lyne ewewydig.	ooreenk. $\angle^e =$
As die ko-binnehoeke tussen twee lyne supplementêr is, dan is die lyne ewewydig.	ko-binne \angle^e suppl.

DRIEHOEKE	
Die binnehoeke van 'n driehoek is supplementêr.	\angle som van Δ OF som van \angle^e in Δ OF binne $\angle^e \Delta$
Die buitehoek van 'n driehoek is gelyk aan die som van die twee teenoorstaande binnehoeke.	buite \angle van Δ
Die hoeke teenoor die gelyke sye van 'n gelykbenige driehoek, is gelyk.	\angle^e teenoor gelyke sye
Die sye teenoor die gelyke sye van 'n gelykbenige driehoek, is gelyk.	sye teenoor gelyke \angle^e
In 'n reghoekige driehoek is die vierkant op die skuinssy gelyk aan die som van die vierkante op die ander twee sye.	Pythagoras OF Stelling van Pythagoras
As die vierkant op een sy van 'n driehoek gelyk is aan die som van die vierkante op die ander twee sye, dan is die driehoek reghoekig.	Omgekeerde Pythagoras OF Omgekeerde stelling: Pythagoras
As drie sye van een driehoek onderskeidelik gelyk is aan drie sye van 'n ander driehoek, dan is die driehoeke kongruent.	SSS
As twee sye en 'n ingeslote hoek van een driehoek onderskeidelik gelyk is aan twee sye en 'n ingeslote hoek van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	SHS OF S \angle S
As twee hoeke en 'n sy van een driehoek onderskeidelik gelyk is aan twee hoeke en 'n ooreenstemmende sy van 'n ander driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	HHS OF \angle \angle S
As die skuinssy en 'n reghoeksy van 'n reghoekige driehoek onderskeidelik gelyk is aan die skuinssy en 'n reghoeksy van 'n ander reghoekige driehoek, dan is die twee driehoeke kongruent.	RHS OF 90° HS
Die lynstuk wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan en gelyk aan die helfte van die derde sy.	Midpt.-stelling
Die lynstuk wat van die middelpunt van een sy van 'n driehoek ewewydig aan die tweede sy getrek word, halveer die derde sy.	lyn deur midpt \parallel 2de sy
Die lyn ewewydig aan een sy van 'n driehoek verdeel die ander twee sye in eweredige dele.	lyn \parallel een sy van Δ OF eweredige stelling, noem \parallel lyne

STELLING	AANVAARBARE REDE
As 'n lyn twee sye van 'n driehoek in eweredige dele verdeel, is die lyn ewewydig aan die derde sy.	lyn verdeel twee sye van Δ eweredig
As twee driehoeke gelykhoekig is, is hulle ooreenstemmende sye eweredig (en is driehoeke dus gelykvormig).	$\parallel \Delta^{\circ}$ OF gelykhoekige Δ°
As die ooreenstemmende sye van twee driehoeke eweredig is, is die driehoeke gelykhoekig (en is driehoeke dus gelykvormig).	Sye van Δ° eweredig
Driehoeke (of parallelogramme) op dieselfde basis en tussen dieselfde ewewydige lyne is gelyk in oppervlakte.	dieselfde basis ; dieselfde hoogte OF gelyke basis ; gelyke hoogte

SIRKELS	
'n Raaklyn aan 'n sirkel is loodreg op die radius/middellyn van die sirkel by die raakpunt.	raaklyn \perp radius raaklyn \perp middellyn
As 'n lyn loodreg getrek word na die radius/middellyn by die punt waar die radius/middellyn die sirkel ontmoet, dan is die lyn 'n raaklyn aan die sirkel.	Lyn \perp Radius OF omgekeerde raaklyn \perp radius OF omgekeerde raaklyn \perp middellyn
Die lynstuk wat die middelpunt van 'n sirkel met die middelpunt van 'n koord verbind, is loodreg op die koord.	lyn vanuit midpt na midpt van koord
Die loodlyn uit die middelpunt van 'n sirkel na 'n koord, halveer die koord.	lyn vanuit midpt \perp op koord
Die middelloodlyn van 'n koord gaan deur die middelpunt van die sirkel.	middelloodlyn van koord
Die hoek wat 'n koord by die middelpunt van 'n sirkel onderspan, is dubbel die hoek wat dit by enige punt op die omtrek onderspan (aan dieselfde kant van die koord as die midpt).	Midpts $\angle = 2 \times$ Omtreks \angle
Die omtrekshoek wat deur die middellyn onderspan word, is 90° .	\angle in halwe sirkel OF middellyn onderspan regte hoek OF \angle in $\frac{1}{2}\odot$
As 'n koord van 'n sirkel 'n regte hoek by die omtrek onderspan, dan is die koord 'n middellyn.	Koord onderspan 90° OF omgekeerde \angle in halwe sirkel
Hoek onderspan deur 'n koord van 'n sirkel, aan dieselfde kant van die koord, is gelyk.	\angle in dieselfde segment
As 'n lynstuk wat twee punte verbind, gelyke hoek by twee ander punte aan dieselfde kant van die lynstuk onderspan, dan is die vier punte konsiesies. (d.w.s. hulle lê op die omtrek van 'n sirkel).	Lynstuk onderspan gelyke \angle OF omgekeerde \angle in dieselfde segment
Gelyke koorde onderspan gelyke omtrekshoeke.	gelyke koorde; gelyke \angle
Gelyke koorde onderspan gelyke middelpuntshoeke.	gelyke koorde; gelyke \angle
Gelyke koorde in gelyke sirkels onderspan gelyke omtrekshoeke.	gelyke sirkels; gelyke koorde ; gelyke \angle
Gelyke koorde in gelyke sirkels onderspan gelyke middelpuntshoeke.	gelyke sirkels; gelyke koorde ; gelyke \angle
Die teenoorstaande hoeke van 'n koordvierhoek is supplementêr.	teenoorst. \angle van kvh
As die teenoorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek.	teenoorst. \angle van vierhoek is supp OF omgekeerde teenoorst \angle koordevierhoek
Die buitehoek van 'n koordevierhoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek.	buite \angle van kvh

STELLING	AANVAARBARE REDE
As die buitehoek van 'n vierhoek gelyk is aan die teenoorstaande binnehoek, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek.	buite \angle van vierhoek = teenoorst. binne \angle OF omgekeerde buite \angle koordevierhoek
Twee raaklyn wat vanaf dieselfde punt buite 'n sirkel na 'n sirkel getrek word, is ewe lank.	Raaklyne vanuit gemeensk. Punt OF raaklyne vanaf dieselfde punt
Die hoek wat gevorm word tussen 'n raaklyn aan 'n sirkel en 'n koord wat vanuit die raakpunt getrek word, is gelyk aan die hoek in die oorstaande segment.	raaklyn koord stelling
As 'n lyn deur die eindpunt van 'n koord 'n hoek met die koord vorm wat gelyk is aan die hoek in die oorstaande segment, dan is die lyn 'n raaklyn aan die sirkel.	\angle tussen lyn en koord OF omgekeerde raaklyn koord stelling

VIERHOEKE	
Die som van die binnehoeke van 'n vierhoek is 360° .	som van \angle 's in vierhoek
Die teenoorstaande sye van 'n parallelogram is ewewydig.	teenoorst. sye van $\parallel m$
As die teenoorstaande sye van 'n vierhoek ewewydig is, dan is die vierhoek 'n parallelogram.	teenoorst sye van vierh is \parallel
Die teenoorstaande sye van 'n parallelogram is gelyk in lengte.	teenoorst. sye van $\parallel m$
As die teenoorstaande sye van 'n vierhoek gelyk is, dan is die vierhoek 'n parallelogram.	teenoorst sye van vierh = OF omgekeerde teenoorst sye van $\parallel m$
Die teenoorstaande hoeke van 'n parallelogram is gelyk.	teenoorst. \angle 's van $\parallel m$
As die teenoorstaande hoeke van 'n vierhoek gelyk is, dan is die vierhoek 'n parallelogram.	teenoorst. \angle 's van vierh = OF omgekeerde teenoorst. \angle 's van $\parallel m$
Die hoeklyne van 'n parallelogram halveer mekaar.	hoeklyne van $\parallel m$
As die hoeklyne van 'n vierhoek mekaar halveer, dan is die vierhoek 'n parallelogram.	hoeklyne van vierh halveer mekaar OF omgekeerde hoeklyne van $\parallel m$
As een paar teenoorstaande sye van 'n vierhoek gelyk en ewewydig is, dan is die vierhoek 'n parallelogram.	teenoorst. sye = en \parallel
Die hoeklyne van 'n parallelogram halveer die oppervlakte van die parallelogram.	hoeklyn van $\parallel m$ halveer opp
Die hoeklyne van 'n ruit halveer mekaar reghoekig.	hoeklyne van ruit
Die hoeklyne van 'n ruit halveer die teenoorstaande binnehoeke.	hoeklyne van ruit
Al vier sye van 'n ruit is gelyk.	sye van ruit
Al vier sye van 'n vierkant is gelyk.	sye van vierkant
Die hoeklyne van 'n reghoek is ewe lank.	hoeklyne van reghoek
Die hoeklyne van 'n vlieër sny mekaar reghoekig.	hoeklyne van vlieër
Die een hoeklyn van 'n vlieër halveer die ander hoeklyn.	hoeklyne van vlieër
Een hoeklyn van 'n vlieër halveer die teenoorstaande binnehoeke	hoeklyne van vlieër

Eksamenriglyne

Bron: Graad 12 Wiskunde Eksamenriglyne, 2021

Die volgende bewyse van stellings is eksamineerbaar:

- 'n Lyn wat vanuit die middelpunt van 'n sirkel loodreg op 'n koord getrek word, halveer die koord
- 'n Lyn wat vanuit die middelpunt 'n koord halveer, is loodreg op die koord.
- Die hoek wat 'n boog/koord by die middelpunt van 'n sirkel onderspan, is dubbel die hoek wat dieselfde boog/koord by enige punt op die omtrek (aan dieselfde kant van die koord as die middelpunt) onderspan
- Die teenoorstaande hoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr
- Die hoek wat gevorm word tussen 'n raaklyn aan 'n sirkel en 'n koord wat vanuit die raakpunt getrek word, is gelyk aan die hoek in die oorstaande segment
- 'n Lyn wat ewewydig aan een sy van 'n driehoek getrek word, verdeel die ander twee sye in eweredige dele.
- Gelykhoekige driehoeke is gelykvormig.

Afleidings vanaf stellings en aksiomas is nodig vir die oplossing van probleme:

- Hoeke in half- of semi-sirkels.
- Gelyke koorde onderspan gelyke hoeke op die omtrek van 'n sirkel.
- Gelyke koorde onderspan gelyke middelpuntshoeke van 'n sirkel.
- In gelyke sirkels onderspan gelyke koorde gelyke hoeke op die omtrek.
- In gelyke sirkels onderspan gelyke koorde gelyke middelpuntshoeke.
- Die buitehoek van 'n koordevierhoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek van die vierhoek.
- Indien die buitehoek van 'n vierhoek gelyk is aan die teenoorstaande binnehoek van die vierhoek, is die vierhoek 'n koordevierhoek.
- Raaklyne wat vanaf 'n gemeenskaplike punt buite die sirkel getrek word, is ewe lank

Die stellings van vierhoeke sal in die eksamen in vrae geïntegreer word.

Gemeenskaplike snypunte (samelopendheid) is uitgesluit.

AFDELING 4:

Vraestel 2 – Aktiwiteite

VRAESTEL 2 AKTIWITEITE

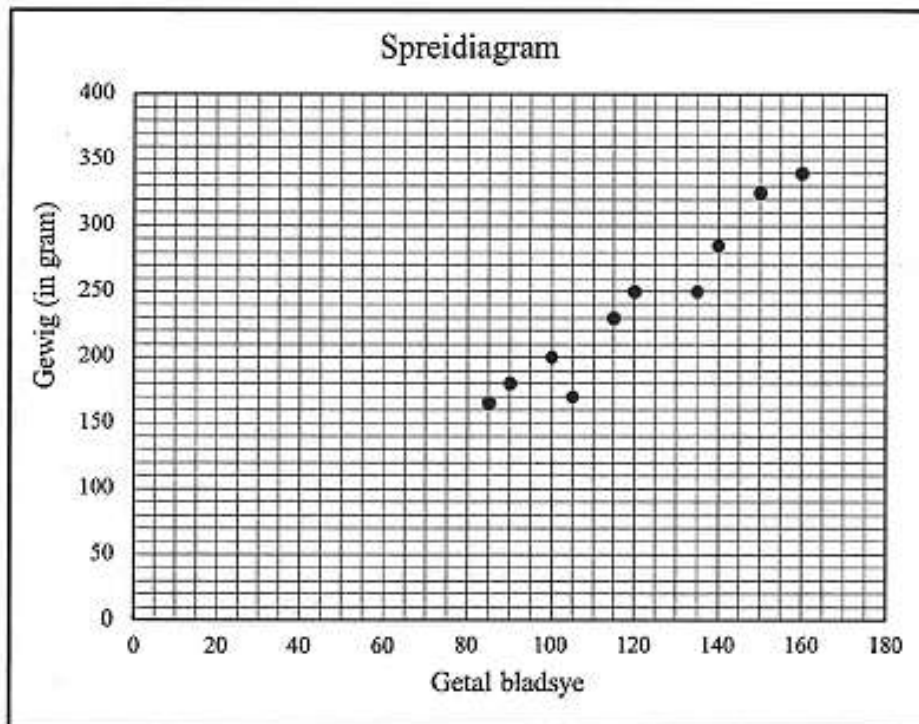
Statistiek en Regressie

(Mei/Junie 2024)

VRAAG 1

Die getal bladsye in tien A4-boeke en hulle ooreenstemmende gewig (in gram) is in die tabel hieronder gegee. Die data word ook in die spreidiagram verteenwoordig.

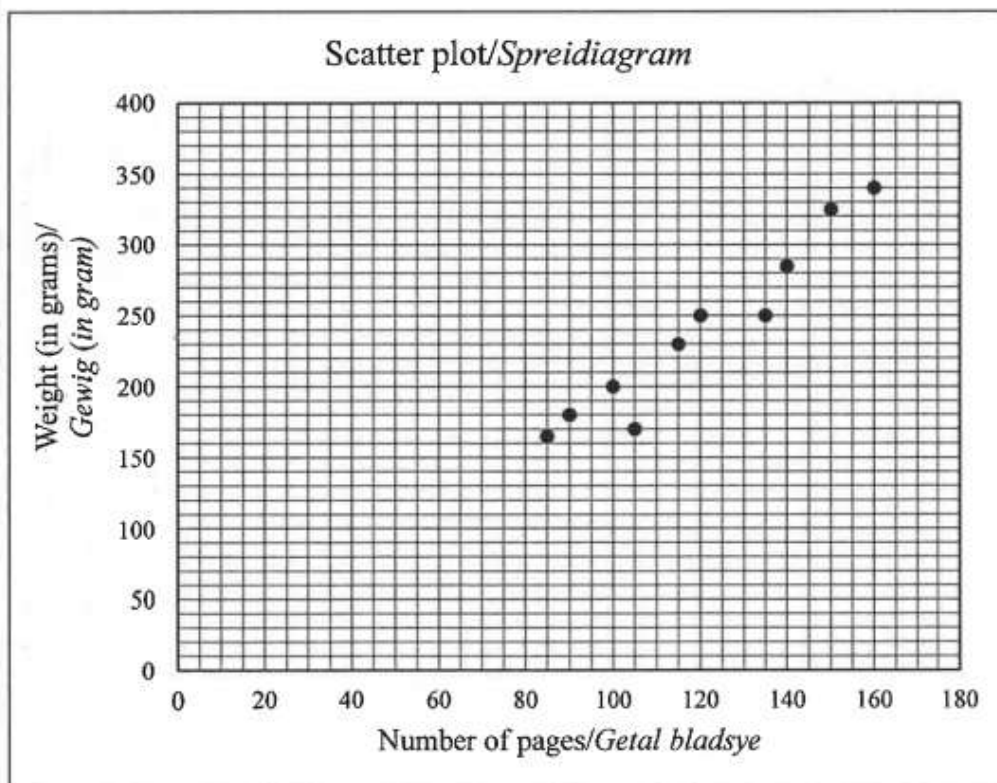
Getal bladsye (x)	85	150	100	120	90	140	135	105	115	160
Gewig (in gram) (y)	165	325	200	250	180	285	250	170	230	340



- 1.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn. (3)
 - 1.2 Trek die kleinstekwadrate-regressielyn op die spreidiagram in die ANTWOORDEBOEK. (2)
 - 1.3 Voorspel die gewig van 'n A4-boek wat 110 bladsye bevat. (2)
 - 1.4 Bereken die persentasie toename in gewig tussen 'n boek met 110 bladsye en 'n boek met 130 bladsye. (3)
- [10]**

BEANTWOORD VRAAG 1.2 HIER:

1.2



VRAAG 2

Vyftig atlete moet toegang tot geskikte oefenfasiliteite hê. Die tabel hieronder toon die afstande, in km, wat hulle moet ry om toegang tot geskikte oefenfasiliteite te kry.

AFSTAND (x km)	GETAL ATLETE
$0 \leq x < 5$	3
$5 \leq x < 10$	7
$10 \leq x < 15$	20
$15 \leq x < 20$	12
$20 \leq x < 25$	5
$25 \leq x < 30$	3

- 2.1 Voltooi die kumulatiewefrekwensie-kolom wat in die tabel in die ANTWOORDEBOEK verskaf word. (2)
- 2.2 Op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word, teken 'n kumulatiewefrekwensie-kromme (ogief) om die data hierbo te verteenwoordig. (3)
- 2.3 Bereken die interkwartielvariasiewydte (IKR) van die data hierbo. (2)
- 2.4 Die gesinne van 4 van die atlete hierbo wat tussen 15 en 20 km vanaf 'n geskikte oefenfasiliteit woon, besluit om 10 kilometer nader aan die fasiliteit te trek. In watter interval sal die getal atlete toeneem? (1)
- 2.5 Bereken die geskatte gemiddelde afstand wat die vyftig atlete moet ry nadat die 4 gesinne 10 kilometer nader aan die fasiliteit getrek het. Toon ALLE berekeninge duidelik. (3)
- [11].

BEANTWOORD VRAAG 2.1 EN 2.2 HIER:

2.1

Distance/ <i>Afstand</i> (x km)	Number of athletes/ <i>Getal atlete</i>	Cumulative frequency/ <i>Kumulatiewe frekwensie</i>
$0 \leq x < 5$	3	
$5 \leq x < 10$	7	
$10 \leq x < 15$	20	
$15 \leq x < 20$	12	
$20 \leq x < 25$	5	
$25 \leq x < 30$	3	

2.2

Ogive/Ogief

Cumulative frequency/
Kumulatiewe frekwensie

Distance/*Afstand*
(in km)

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 1**

- 1.1 Die eienaar van 'n klein maatskappy wil vasstel of advertensies in 'n streekkoerant effektief is. Die tabel hieronder toon die bedrag wat aan advertensies spandeer is en die ooreenstemmende verkoopsyfers vir die laaste 9 jaar.

Bedrag aan advertensies spandeer (in rand) (x)	21 300	23 700	24 800	30 540	24 100	40 680	22 400	35 250	29 110
Verkope (in rand) (y)	311 500	326 700	349 200	470 000	316 100	564 200	314 000	487 300	392 900

- 1.1.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrateregressielyn vir die data. (3)
- 1.1.2 Voorspel die verkope vir 'n jaar waarin die maatskappy R28 500 aan advertensies sal spandeer. (2)
- 1.1.3 Skryf die korrelasiekoëffisiënt van die data neer. (1)
- 1.1.4 Beskryf die verwantskap tussen die bedrag wat aan advertensies in die streekkoerant spandeer is en die verkope van hierdie maatskappy. (1)
- 1.2 Die wins wat die klein maatskappy gedurende dieselfde 9 jaar gemaak het, word in die tabel hieronder gegee.

Wins (in rand)	110 750	107 376	152 338	244 480	144 021	275 994	121 900	207 636	187 700
-----------------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

- 1.2.1 Bereken die gemiddelde wins wat gedurende die 9 jaar gemaak is. (2)
- 1.2.2 Skryf die standaardafwyking vir die data neer. (1)
- 1.2.3 Bepaal die aantal jaar waarin die maatskappy 'n wins wat meer as een standaardafwyking van die gemiddelde is, gemaak het. (2)

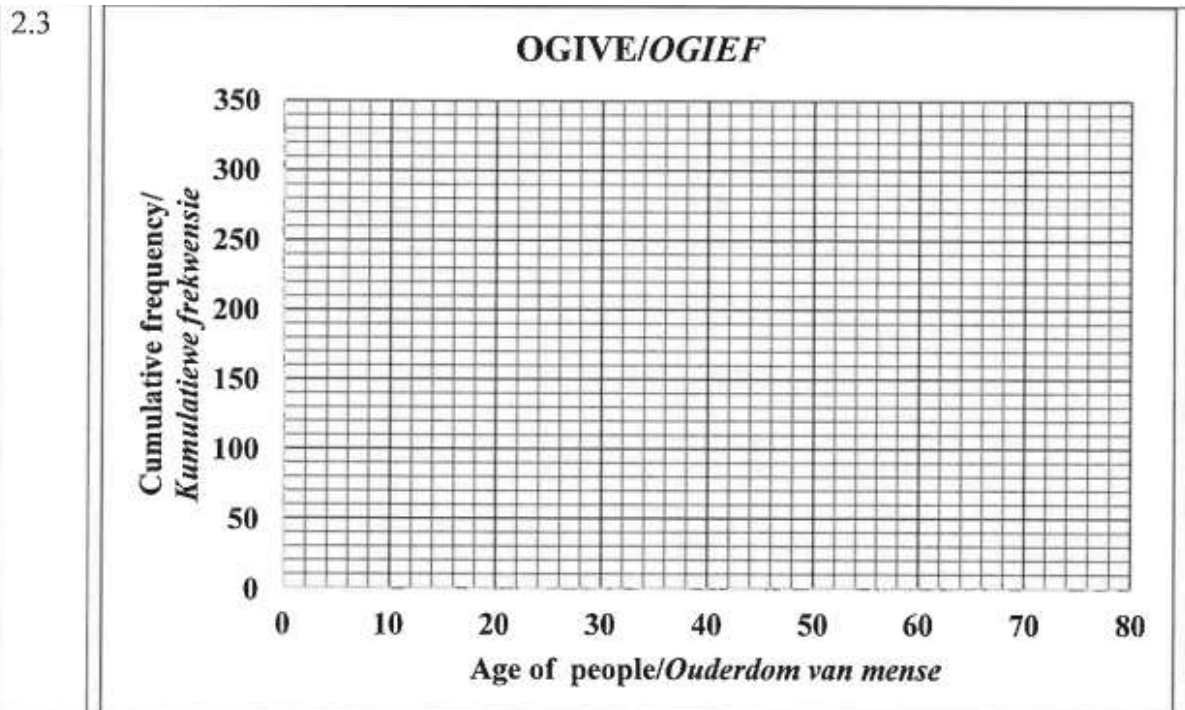
[12]

VRAAG 2

Die ouderdomme van die mense wat 'n musiekkonsert bygewoon het, is in die tabel hieronder opgesom.

OUDERDOM	GETAL MENSE
$5 < x \leq 15$	20
$15 < x \leq 25$	25
$25 < x \leq 35$	60
$35 < x \leq 45$	90
$45 < x \leq 55$	55
$55 < x \leq 65$	40
$65 < x \leq 75$	30

- 2.1 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 2.2 Hoeveel mense het die musiekkonsert bygewoon? (1)
- 2.3 Skets 'n kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK voorsien word, om die data hierbo te verteenwoordig. (4)
- 2.4 Gebruik die kumulatiewefrekwensie-grafiek om die mediaanouderdom van die mense wat die musiekkonsert bygewoon het, te bepaal. (2)
- [8]**

BEANTWOORD VRAAG 2.3 HIER:

*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 1**

Die tabel hieronder toon die massa (in kg) van skooltasse van 80 leerders.

MASSA (in kg)	FREKWENSIE
$5 < m \leq 7$	6
$7 < m \leq 9$	18
$9 < m \leq 11$	21
$11 < m \leq 13$	19
$13 < m \leq 15$	11
$15 < m \leq 17$	4
$17 < m \leq 19$	1

- 1.1 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 1.2 Voltooi die kumulatiewefrekwensie-kolom in die tabel in die ANTWOORDEBOEK. (2)
- 1.3 Skets 'n kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) vir die gegewe data op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word. (3)
- 1.4 Gebruik die grafiek om die mediaanmassa vir hierdie data te bepaal. (2)
- 1.5 Die internasionale riglyn vir die massa van 'n skooltas is dat dit nie 10% van 'n leerder se liggaamsmassa moet oorskry nie.
 - 1.5.1 Bereken die benaderde gemiddelde massa van die skooltas. (2)
 - 1.5.2 Daar is gevind dat die gemiddelde massa van hierdie groep leerders 80 kg is. Met verwysing na gemiddelde massa, voldoen hierdie skooltas aan die internasionale riglyn? Motiveer jou antwoord. (2)

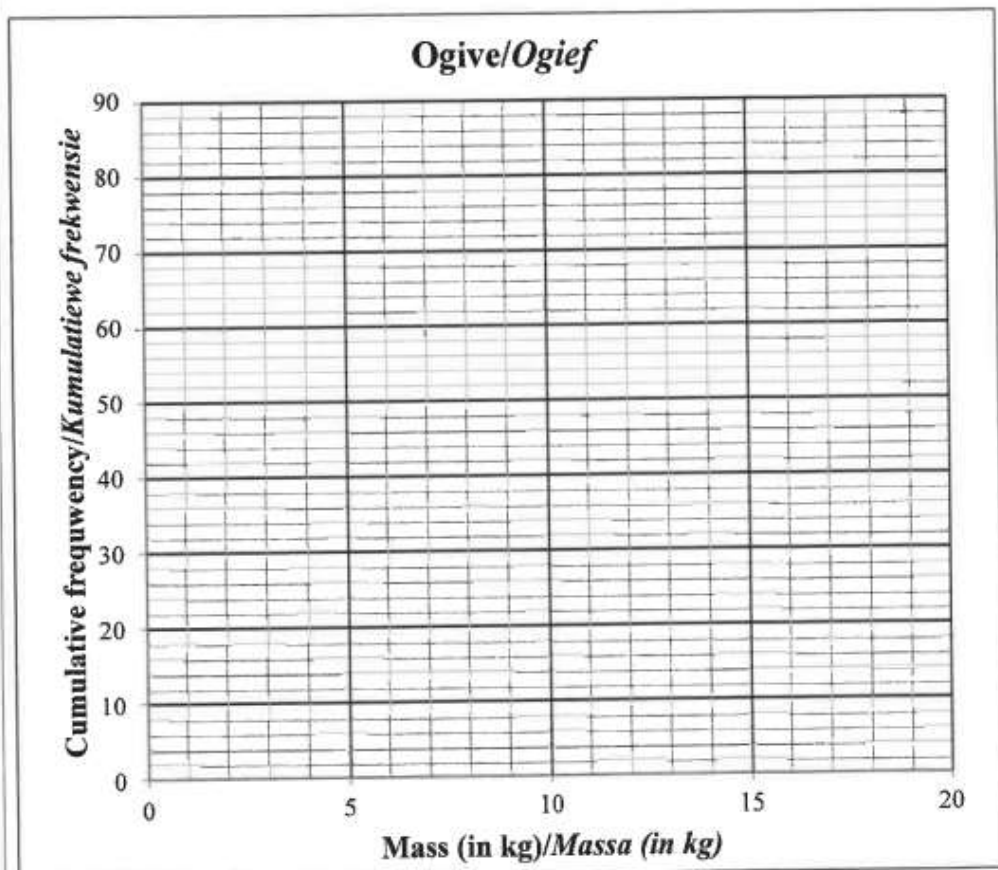
[12]

BEANTWOORD VRAAG 1.2 EN 1.3 HIER:

1.2

MASS (in kg)/ MASSA (in kg)	FREQUENCY/ FREKWENSIE	CUMULATIVE FREQUENCY/ KUMULATIEWE FREKWENSIE
$5 < m \leq 7$	6	
$7 < m \leq 9$	18	
$9 < m \leq 11$	21	
$11 < m \leq 13$	19	
$13 < m \leq 15$	11	
$15 < m \leq 17$	4	
$17 < m \leq 19$	1	

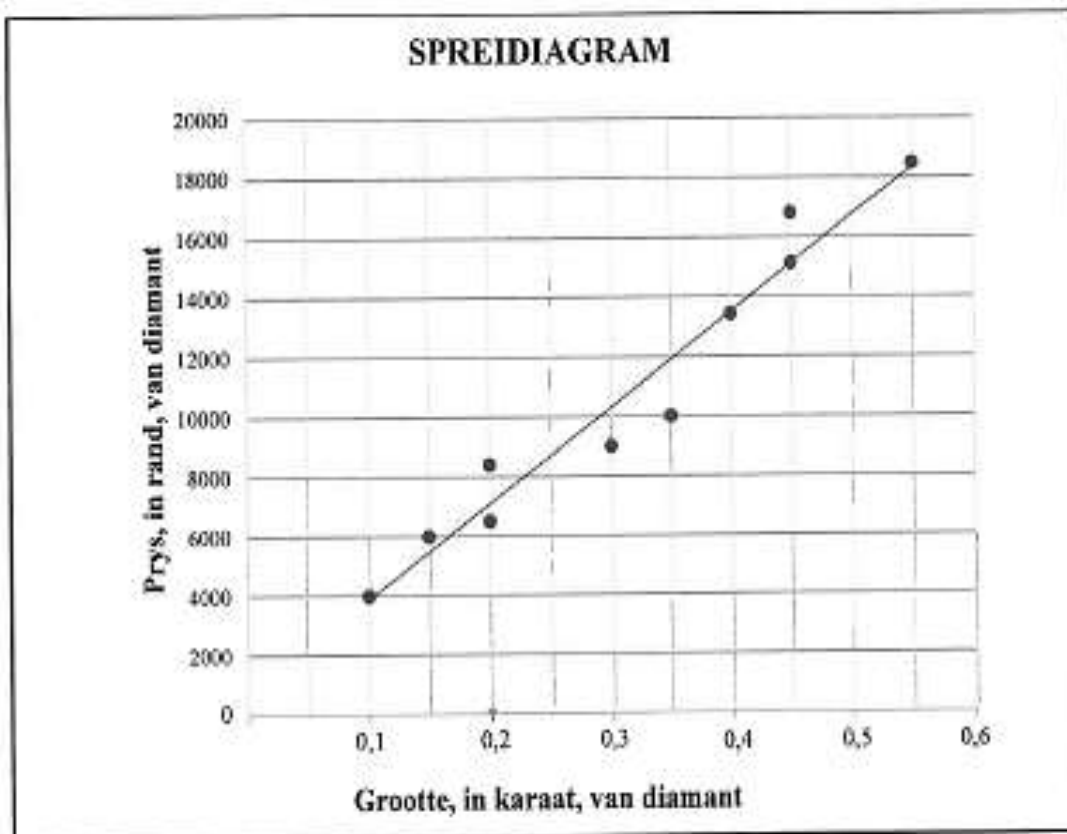
1.3



VRAAG 2

Die tabel hieronder toon die grootte (in karaat) en die prys (in rand) van 10 diamante wat deur 'n diamanthandelaar verkoop is. Hierdie inligting word ook in die spreidiagram hieronder getoon. Die kleinstekwadrate-regressielyn is getrek.

Grootte, in karaat, van diamant (x)	0,1	0,15	0,2	0,2	0,3	0,35	0,4	0,45	0,45	0,55
Prys, in rand, van diamant (y)	4 000	6 000	6 500	8 400	9 000	10 000	13 440	15 120	16 800	18 480

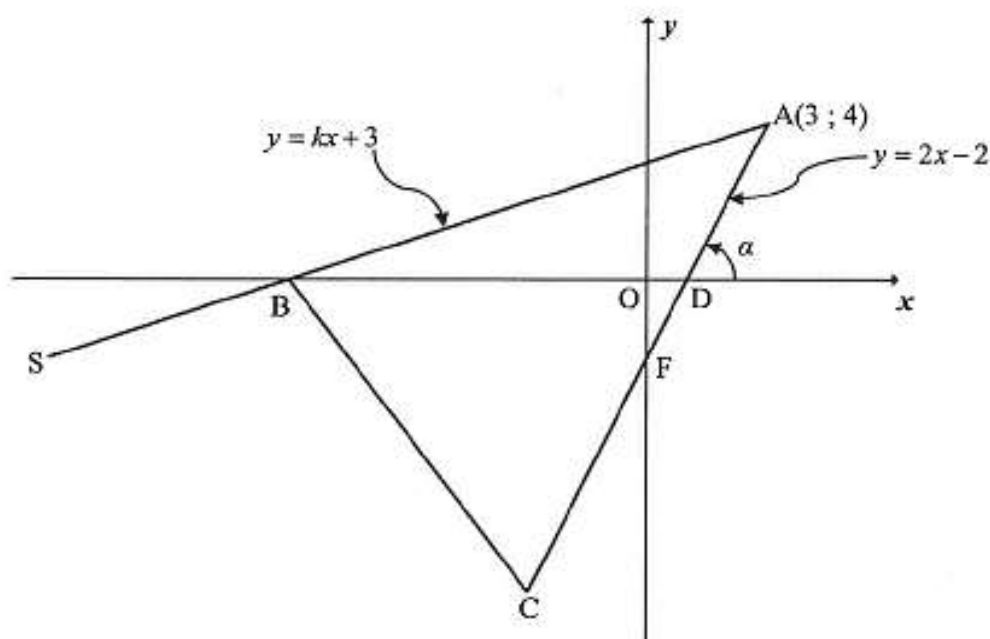


- 2.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn vir die data. (3)
- 2.2 As die handelaar 'n diamant verkoop het wat 0,25 karaat groot is, voorspel die verkoopprys van die diamant in rand. (2)
- 2.3 Bereken die gemiddelde prysverhoging per 0,05 karaat van die diamante. (2)
- 2.4 Daar is later vasgestel dat die prys van die 0,35 karaat diamant verkeerd aangeteken is. Die korrekte prys is R11 500. Wanneer die dataset reggestel word, raak die korrelasie tussen die grootte en die prys van hierdie diamante sterker. Verduidelik die rede hiervoor deur na die gegewe spreidiagram te verwys. (1)

[8]

Analitiese Meetkunde*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 3**

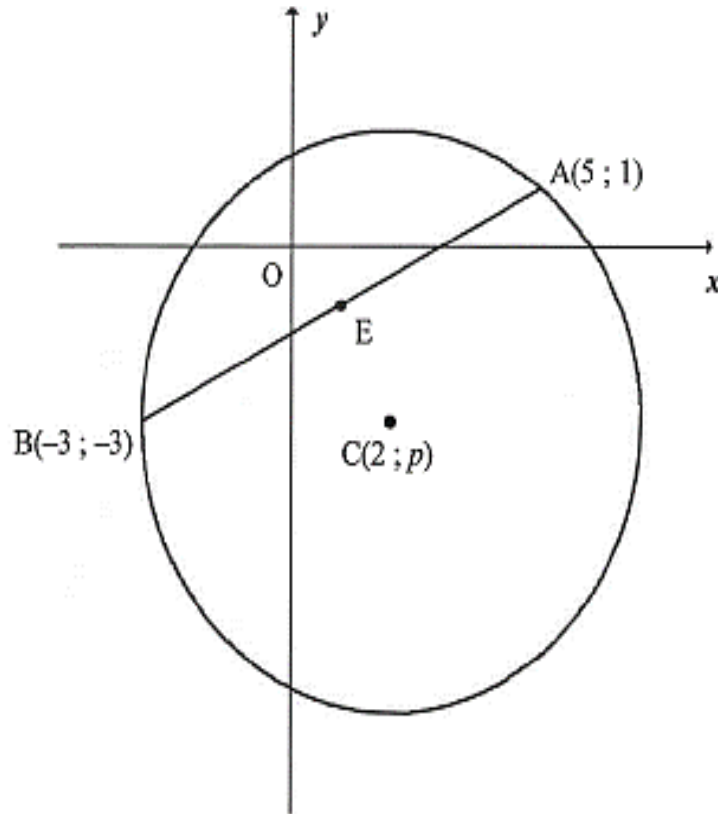
In die diagram is $A(3; 4)$, B en C hoekpunte van $\triangle ABC$. AB is verleng na S.
 D en F is onderskeidelik die x- en y-afsnitte van AC. F is die middelpunt van AC en die
 inklinasiehoek van AC is α . Die vergelyking van AB is $y = kx + 3$ en die vergelyking van
 AC is $y = 2x - 2$.



- 3.1 Toon dat $k = \frac{1}{3}$. (1)
- 3.2 Bereken die koördinate van B, die x-afsnit van lyn AS. (2)
- 3.3 Bereken die koördinate van C. (4)
- 3.4 Bepaal die vergelyking van die lyn parallel aan BC en wat deur $S(-15; -2)$ gaan. Skryf jou antwoord in die vorm $y = mx + c$. (5)
- 3.5 Bereken die grootte van \hat{BAC} . (5)
- 3.6 As dit verder gegee word dat AC se lengte $6\sqrt{5}$ eenhede is, bereken die waarde van Area van $\triangle ABD$
Area van $\triangle ASC$ (5)
- [22]**

VRAAG 4

In die diagram is die sirkel met middelpunt $C(2; p)$ geteken. $A(5; 1)$ en $B(-3; -3)$ is punte op die sirkel. E is die middelpunt van AB .

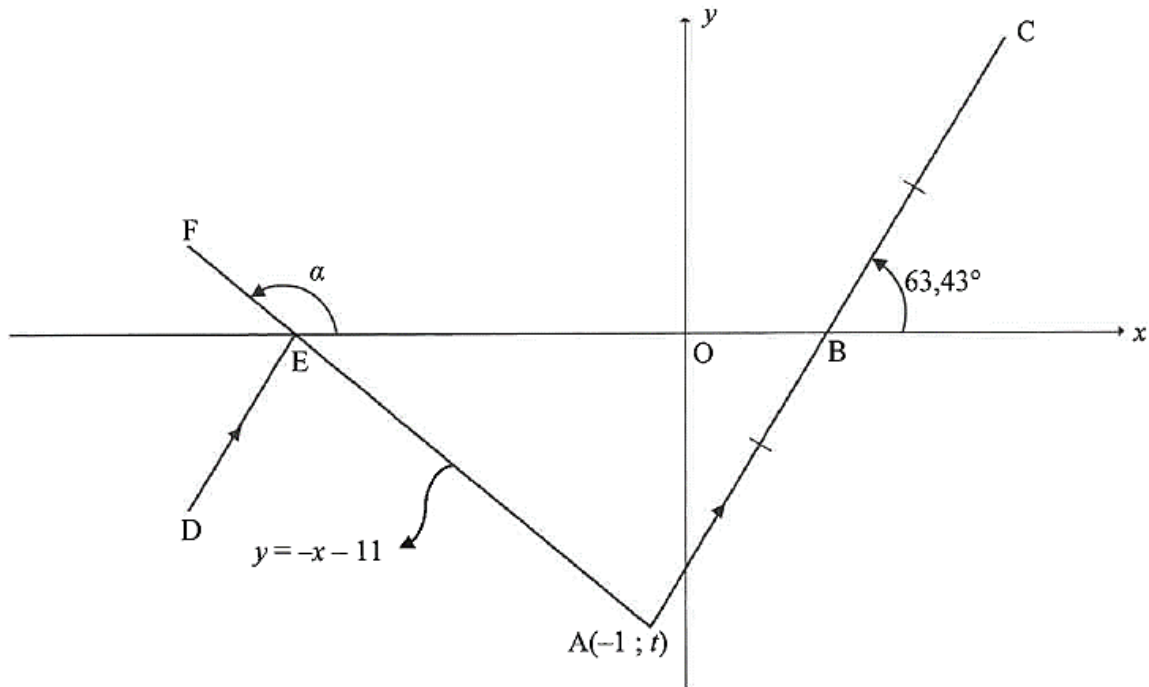


- 4.1 Bereken die koördinate van E , die middelpunt van AB . (2)
 - 4.2 Bereken die lengte van AB . Laat jou antwoord in wortelvorm. (1)
 - 4.3 Bepaal die vergelyking van die loodregte lyn wat AB halveer in die vorm $y = mx + c$. (4)
 - 4.4 Toon dat $p = -3$. (1)
 - 4.5 Toon, met berekeninge, dat die vergelyking van die sirkel $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ is. (4)
 - 4.6 Bereken die waardes van t waarvoor die reguitlyn $y = tx + 8$ nie die sirkel sal sny nie. (6)
- [18]**

(Mei/Junie 2023)

VRAAG 3

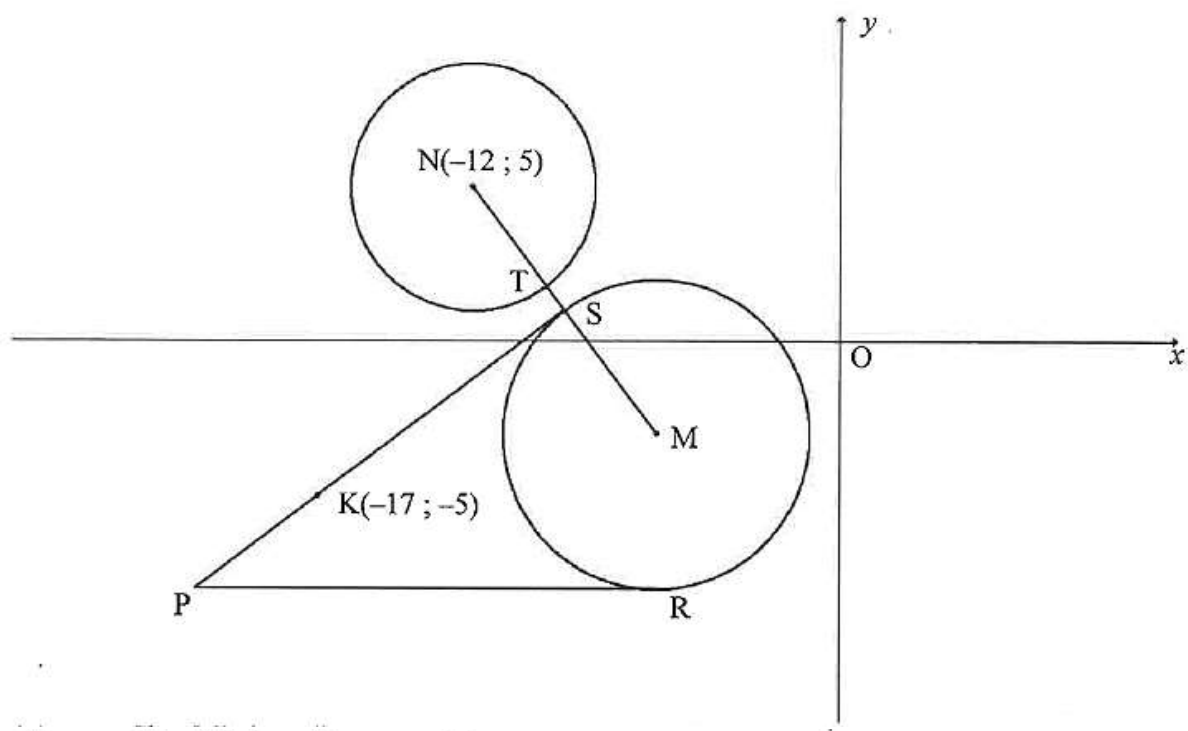
In die diagram is die vergelyking van lyn AF $y = -x - 11$. B , 'n punt op die x -as, is die middelpunt van die reguitlyn wat $A(-1; t)$ en C verbind. Die inklinasiehoeke van AF en AC is α en $63,43^\circ$ onderskeidelik. AF sny die x -as by E . D is 'n punt sodanig dat $DE \parallel AC$.



- 3.1 Bereken die:
- 3.1.1 Waarde van t (2)
- 3.1.2 Grootte van α (2)
- 3.1.3 Gradiënt van AC , tot die naaste heelgetal (2)
- 3.2 Bepaal die vergelyking van AC in die vorm $y = mx + k$. (2)
- 3.3 Bereken die:
- 3.3.1 Koördinate van C (3)
- 3.3.2 Grootte van \hat{FED} (3)
- 3.4 G is 'n punt sodanig dat $EAGC$, in daardie volgorde, 'n parallellogram is.
- Bepaal die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt G en wat deur punt B gaan.
- Skryf jou antwoord in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. (4)
- [18]

VRAAG 4

In die diagram is die vergelyking van die sirkel met middelpunt $N(-12; 5)$, $x^2 + y^2 + 24x - 10y + 153 = 0$. Die vergelyking van die sirkel met middelpunt M word as $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$ gegee. PS en PR is raaklyne aan die sirkel met middelpunt M by S en R onderskeidelik. PR is parallel aan die x -as. $K(-17; -5)$ is 'n punt op PS . Die reguitlyn wat N en M verbind, sny die kleiner sirkel by T en die groter sirkel by S .

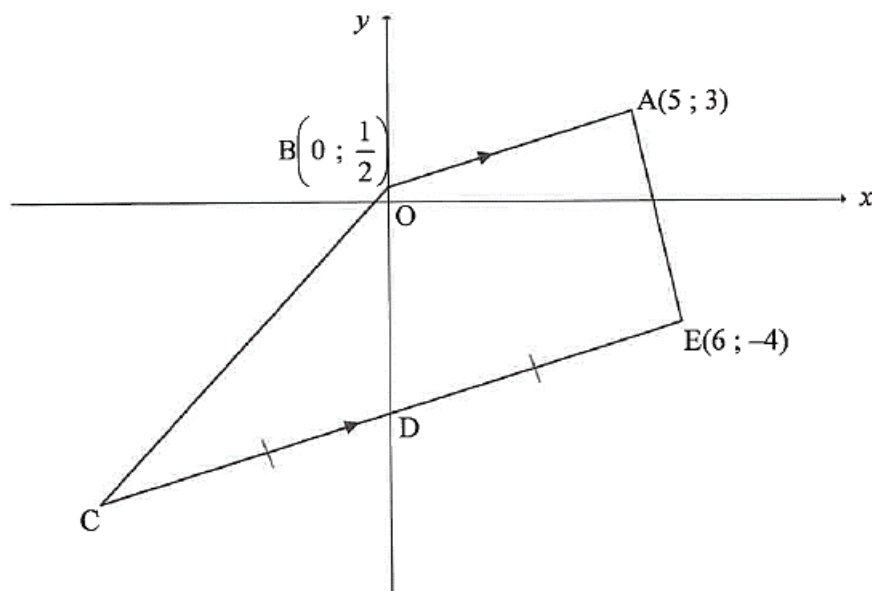


- 4.1 Skryf die koördinate van M neer. (2)
- 4.2 Bereken die:
 - 4.2.1 Lengte van die radius van die kleiner sirkel (2)
 - 4.2.2 Lengte van TS (4)
- 4.3 Bepaal die vergelyking van die raaklyn:
 - 4.3.1 PR (2)
 - 4.3.2 PS , in die vorm $y = mx + c$ (5)
- 4.4 Vierhoek $PSMR$ is getrek. Bereken die:
 - 4.4.1 Omtrek van $PSMR$ (5)
 - 4.4.2 Verhouding van $\frac{\text{oppervlakte van } \triangle NPS}{\text{oppervlakte van vierhoek } PSMR}$ (2)

[22]

*(Mei/Junie 2022)***VRAAG 3**

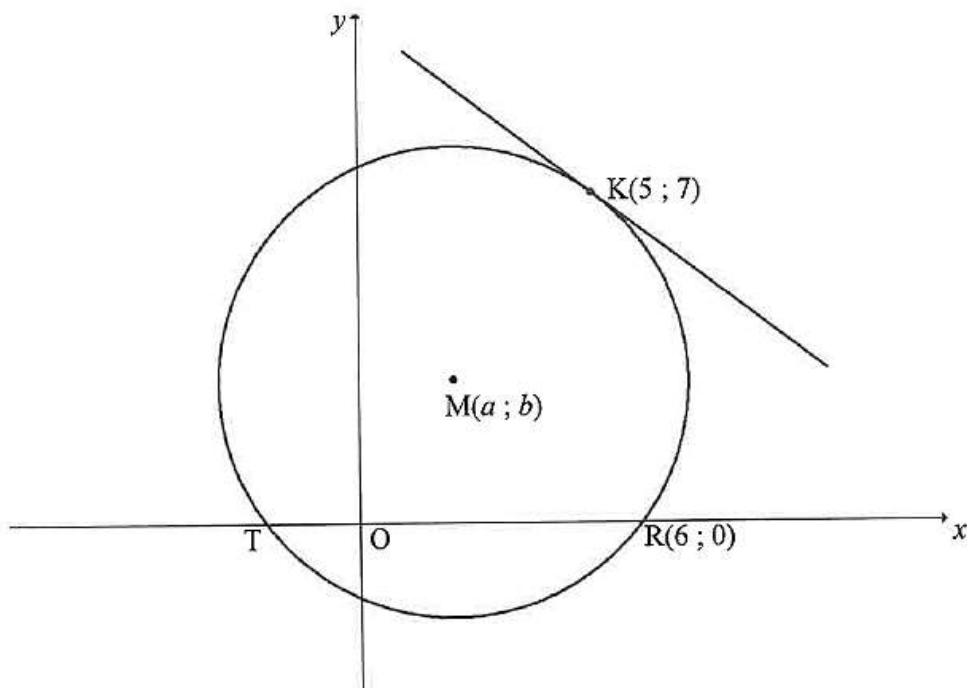
In die diagram is $A(5; 3)$, $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$, C en $E(6; -4)$ die hoekpunte van 'n trapesium met $BA \parallel CE$. D is die y -afsnit van CE en $CD = DE$.



- 3.1 Bereken die gradiënt van AB . (2)
- 3.2 Bepaal die vergelyking van CE in die vorm $y = mx + c$. (3)
- 3.3 Bereken die:
- 3.3.1 Koördinate van C (3)
- 3.3.2 Oppervlakte van vierhoek $ABCD$ (4)
- 3.4 As punt K die refleksie van E in die y -as is:
- 3.4.1 Skryf die koördinate van K neer (2)
- 3.4.2 Bereken die:
- (a) Omtrek van $\triangle KEC$ (4)
- (b) Grootte van \hat{KCE} (3)
- [21]

VRAAG 4

In die diagram is die sirkel met middelpunt $M(a; b)$ geskets. T en $R(6; 0)$ is die x -afsnitte van die sirkel. 'n Raaklyn is aan die sirkel by $K(5; 7)$ getrek.



- 4.1 M is 'n punt op die lyn $y = x + 1$.
- 4.1.1 Skryf b in terme van a . (1)
- 4.1.2 Bereken die koördinate van M. (5)
- 4.2 As $(2; 3)$ die koördinate van M is, bereken die lengte van:
- 4.2.1 Die radius van die sirkel (2)
- 4.2.2 TR (2)
- 4.3 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by K. Skryf jou antwoord in die vorm $y = mx + c$. (5)
- 4.4 'n Horisontale lyn word as 'n raaklyn aan die sirkel M by die punt $N(c; d)$ getrek, waar $d < 0$.
- 4.4.1 Skryf die koördinate van N neer. (2)
- 4.4.2 Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt N wat deur T gaan. Skryf jou antwoord in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. (3)
- [20]

Trigonometrie*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 5**5.1 Indien $\sin 40^\circ = p$, skryf ELK van die volgende in terme van p .

5.1.1 $\sin 220^\circ$ (2)

5.1.2 $\cos^2 50^\circ$ (2)

5.1.3 $\cos(-80^\circ)$ (3)

5.2 Gegee: $\tan x(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{\cos x}$

5.2.1 Bewys die identiteit hierbo. (5)

5.2.2 Vir watter waardes van x , in die interval $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$, sal die identiteit ongedefinieerd wees? (3)

5.3 Gegee die uitdrukking: $\frac{\sin 150^\circ + \cos^2 x - 1}{2}$

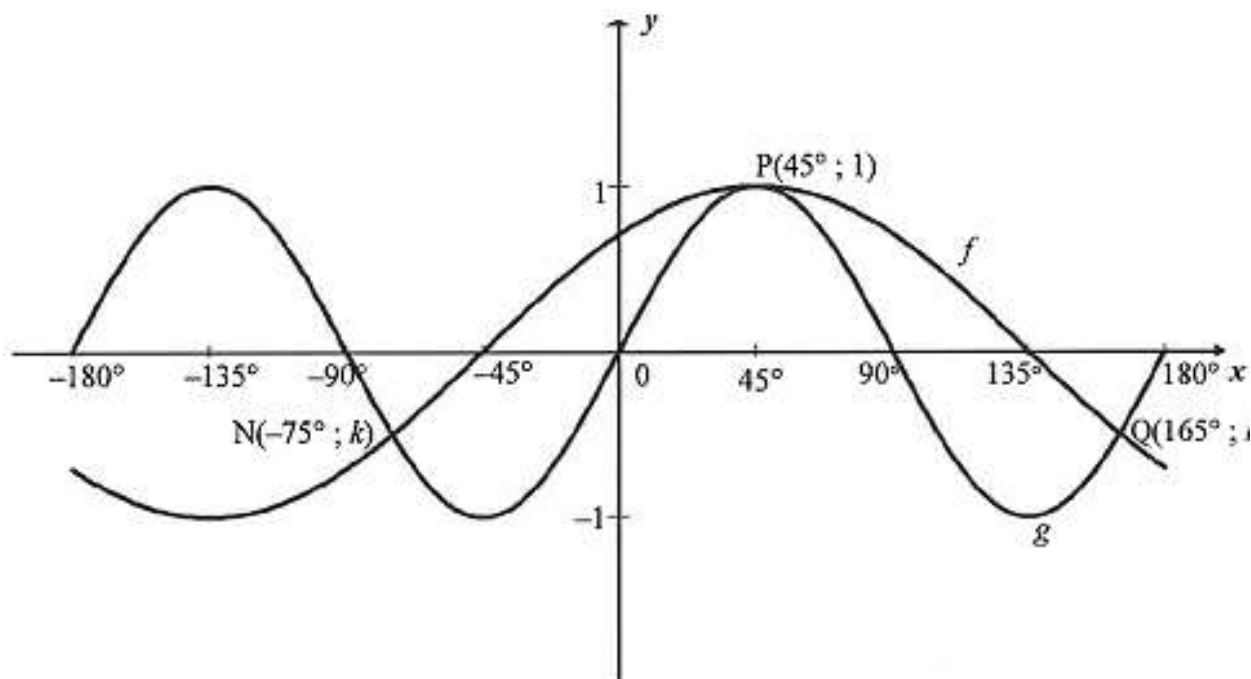
5.3.1 Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, vereenvoudig die uitdrukking hierbo gegee tot 'n enkele trigonometriese term in terme van $\cos 2x$. (6)

5.3.2 Bepaal gevolglik die algemene oplossing van

$$\frac{\sin 150^\circ + \cos^2 x - 1}{2} = \frac{1}{25}$$
(5)
[26]

VRAAG 6

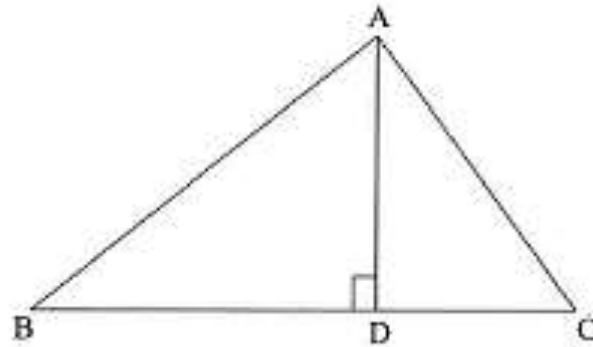
In die diagram is die grafieke van $f(x) = \cos(x+a)$ en $g(x) = \sin 2x$ vir die interval $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$ geskets. Die grafieke sny by $N(-75^\circ; k)$, $P(45^\circ; 1)$ en $Q(165^\circ; k)$. P is ook 'n draaipunt van albei grafieke.



- 6.1 Skryf die periode van f neer. (1)
 - 6.2 Skryf die amplitude van g neer. (1)
 - 6.3 Skryf die waarde van a neer. (1)
 - 6.4 Bereken die waarde van k , die y -koördinaat van N en Q , sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. (2)
 - 6.5 Bereken die waarde van x as $g(x+60^\circ) = f(x+60^\circ)$ en $x \in [-45^\circ; 0^\circ]$. (1)
 - 6.6 Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, bepaal die aantal oplossings wat die vergelyking $\sqrt{2} \sin 2x = \sin x + \cos x$ in die interval $x \in [-90^\circ; 90^\circ]$ het. Toon ALLE berekeninge duidelik. (4)
- [10]**

VRAAG 7

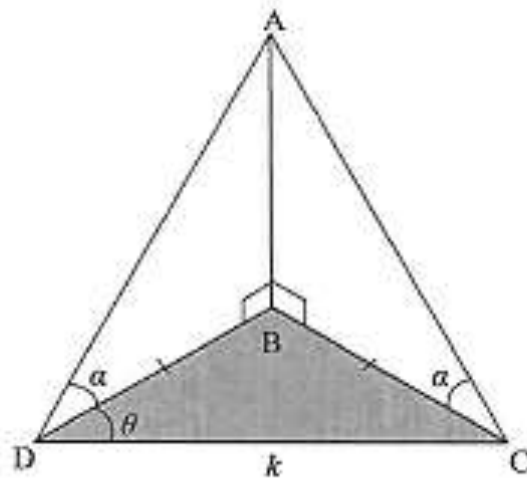
7.1 $\triangle ABC$ is in die diagram hieronder geskets. AD is sodanig getrek dat $AD \perp BC$.



7.1.1 Gebruik die diagram hierbo om AD in terme van $\sin \hat{B}$ te bepaal. (2)

7.1.2 Bewys vervolgens dat die oppervlakte van $\triangle ABC = \frac{1}{2}(BC)(AB)\sin \hat{B}$ (1)

7.2 In die diagram lê punte B , C en D in dieselfde horisontale vlak.
 $\hat{ADB} = \hat{ACB} = \alpha$, $\hat{CDB} = \theta$ en $DC = k$ eenhede, $BD = BC$.



7.2.1 Bewys dat $AD = AC$ (2)

7.2.2 Bewys dat $BD = \frac{k}{2 \cos \theta}$ (3)

7.2.3 Bepaal die oppervlakte van $\triangle BCD$ in terme van k en as 'n enkele trigonometriese verhouding van θ (3)
 [11]

*(Mei/Junie 2023)***VRAAG 5**

- 5.1 **Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, vereenvoudig die volgende uitdrukking tot 'n enkele trigonometrieverhouding:

$$\frac{1 - \sin(-\theta)\cos(90^\circ + \theta)}{\cos(\theta - 360^\circ)} \quad (5)$$

- 5.2 Gegee dat $\cos 20^\circ = p$

Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, skryf ELK van die volgende in terme van p :

5.2.1 $\cos 200^\circ$ (2)

5.2.2 $\sin(-70^\circ)$ (2)

5.2.3 $\sin 10^\circ$ (3)

- 5.3 **Bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waarde van:

$$\cos(A + 55^\circ)\cos(A + 10^\circ) + \sin(A + 55^\circ)\sin(A + 10^\circ) \quad (3)$$

- 5.4 **Beskou:** $\frac{\cos 2x + \sin 2x - \cos^2 x}{\sin x - 2\cos x} = -\sin x$

5.4.1 **Bewys** die identiteit hierbo. (3)

5.4.2 **Bepaal** die waarde van $\frac{\cos 2x + \sin 2x - \cos^2 x}{-3\sin^2 x + 6\sin x \cos x}$ (3)

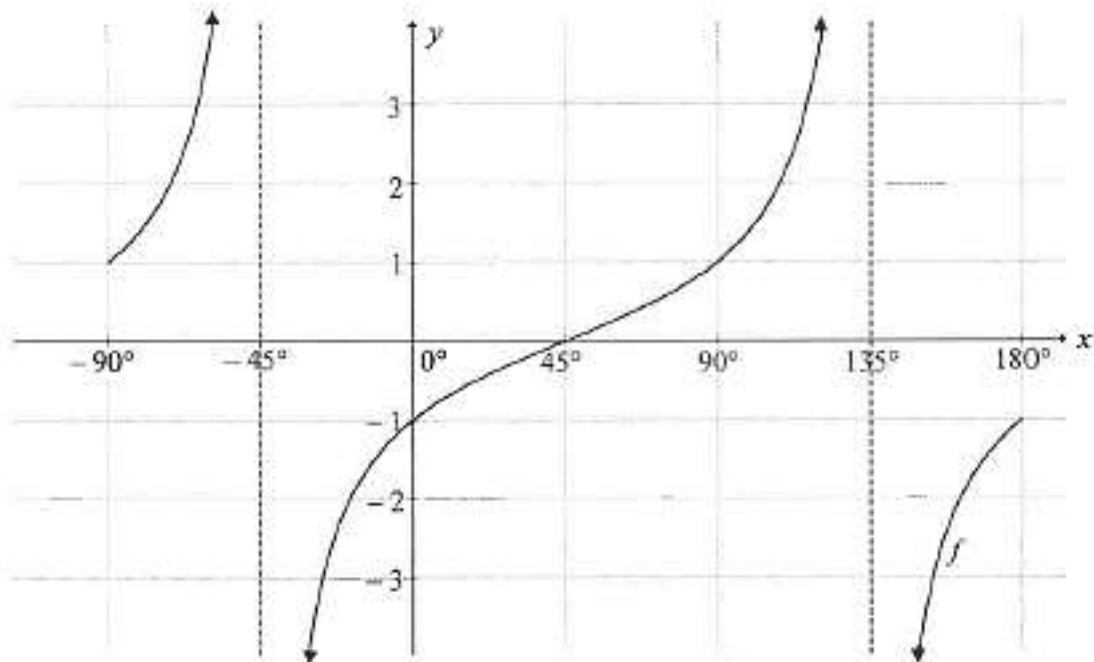
- 5.5 **Gegee:** $3\tan 4x = -2\cos 4x$

5.5.1 **Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, toon dat $\sin 4x = -0,5$ die enigste oplossing vir die vergelyking hierbo is. (4)

5.5.2 **Bepaal** vervolgens die algemene oplossing van x in die vergelyking $3\tan 4x = -2\cos 4x$ (3)
[28]

VRAAG 6

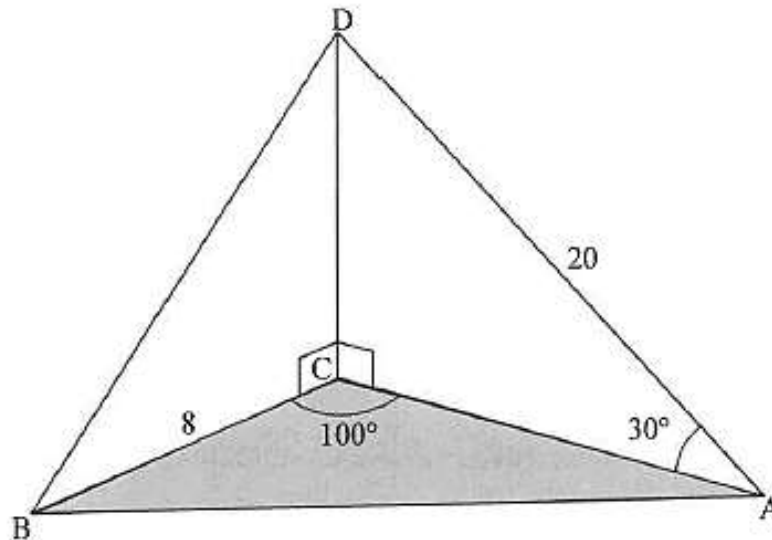
In die diagram hieronder is die grafiek van $f(x) = \tan(x - 45^\circ)$ geskets vir $x \in [-90^\circ; 180^\circ]$.



- 6.1 Skryf die periode van f neer. (1)
- 6.2 Op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word, skets die grafiek van $g(x) = -\cos 2x$ vir die interval $x \in [-90^\circ; 180^\circ]$. Toon ALLE afsnitte met die asse asook die minimum en maksimum punte van die grafiek. (3)
- 6.3 Skryf die waardeversameling van g neer. (1)
- 6.4 Die grafiek van g word 45° na links geskuif om die grafiek van h te vorm. Bepaal die vergelyking van h in sy eenvoudigste vorm. (2)
- 6.5 Gebruik die grafiek(e) om die waardes van x in die interval $x \in [-90^\circ; 90^\circ]$, te bepaal waarvoor:
- 6.5.1 $f(x) > 1$ (2)
- 6.5.2 $2\cos 2x - 1 > 0$ (4)
- [13]

VRAAG 7

In die diagram is A, B en C punte in dieselfde horisontale vlak. D is 'n punt direk bo C, dit is $DC \perp AC$ en $DC \perp BC$. Daar word gegee dat $\hat{ACB} = 100^\circ$, $\hat{CAD} = 30^\circ$, $AD = 20$ eenhede en $BC = 8$ eenhede.



7.1 Bereken die lengte van:

7.1.1 AC (2)

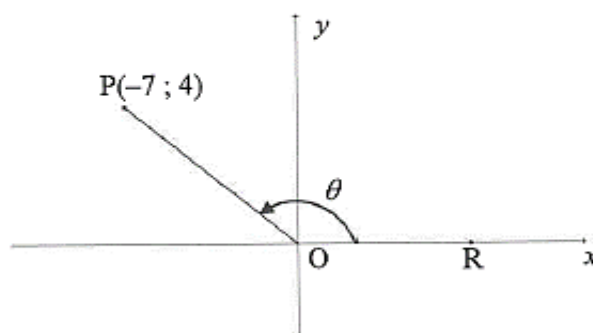
7.1.2 AB (3)

7.2 Indien daar verder gegee word dat $\hat{ABD} = 73,4^\circ$, bereken die grootte van \hat{ADB} . (3)
[8]

(Mei/Junie 2022)

VRAAG 5

- 5.1 In die diagram hieronder is $P(-7; 4)$ 'n punt in die Kartesiese vlak. R is 'n punt op die positiewe x -as sodanig dat stomphoek $\hat{P}OR = \theta$.



Bereken, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die:

- 5.1.1 Lengte OP (2)
- 5.1.2 Waarde van:
- (a) $\tan \theta$ (1)
- (b) $\cos(\theta - 180^\circ)$ (2)
- 5.2 Bepaal die algemene oplossing van: $\sin x \cos x + \sin x = 3 \cos^2 x + 3 \cos x$ (7)
- 5.3 Gegee die identiteit: $\frac{\sin 3x}{1 - \cos 3x} = \frac{1 + \cos 3x}{\sin 3x}$
- 5.3.1 Bewys die identiteit hierbo gegee. (3)
- 5.3.2 Bepaal die waardes van x , in die interval $x \in [0^\circ; 60^\circ]$, waarvoor die identiteit ongedefinieerd sal wees. (3)
- [18]

VRAAG 6

- 6.1 Vereenvoudig, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die volgende uitdrukking tot 'n enkele trigonometriesse term:

$$\frac{\sin 10^\circ}{\cos 440^\circ} + \tan(360^\circ - \theta) \cdot \sin 2\theta \quad (6)$$

- 6.2 Gegee: $\sin(60^\circ + 2x) + \sin(60^\circ - 2x)$

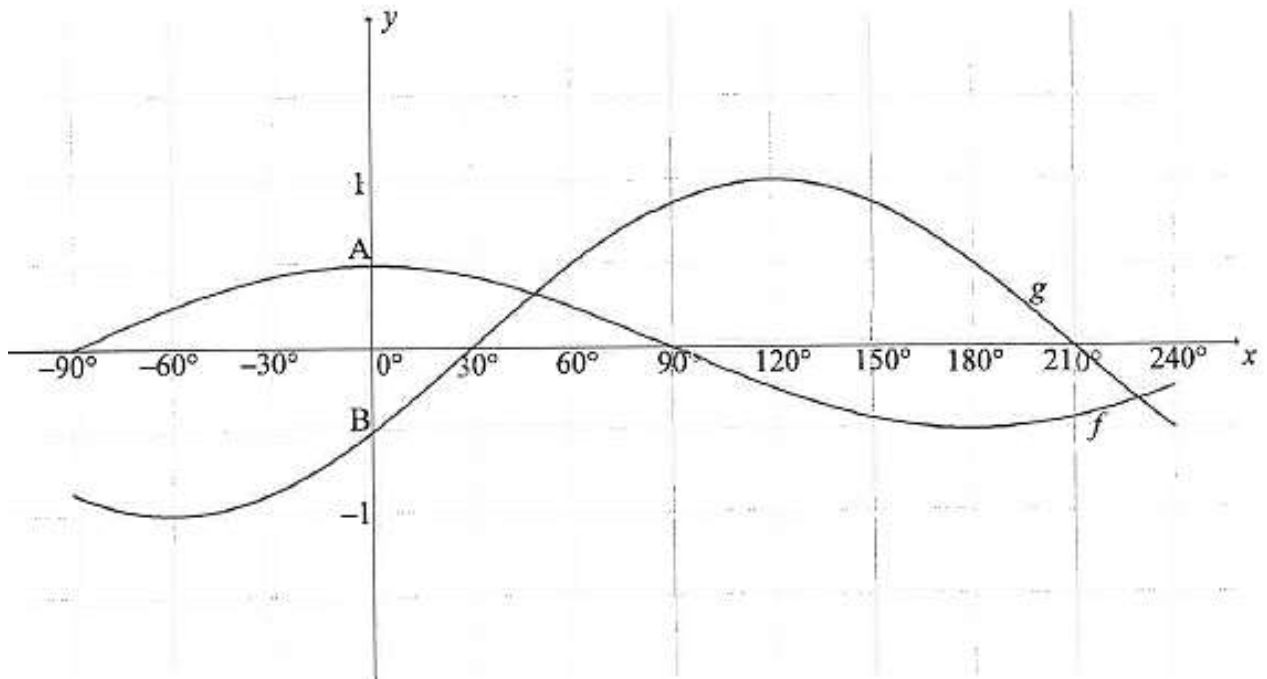
6.2.1 Bereken die waarde van k as $\sin(60^\circ + 2x) + \sin(60^\circ - 2x) = k \cos 2x$. (3)

6.2.2 As $\cos x = \sqrt{t}$, bepaal, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waarde van $\tan 60^\circ [\sin(60^\circ + 2x) + \sin(60^\circ - 2x)]$ in terme van t . (3)

[12]

VRAAG 7

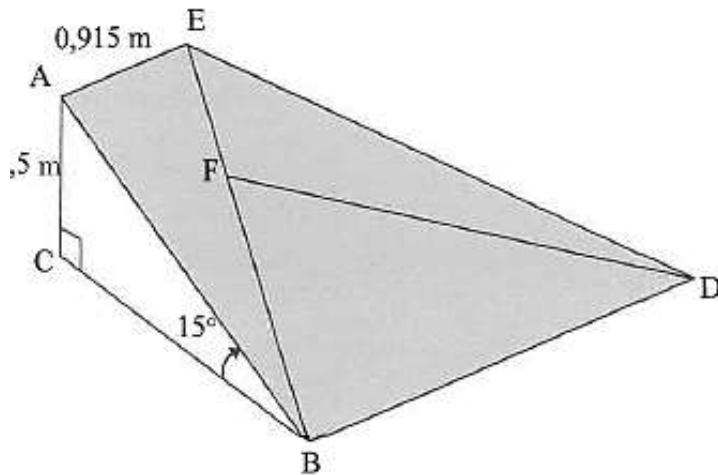
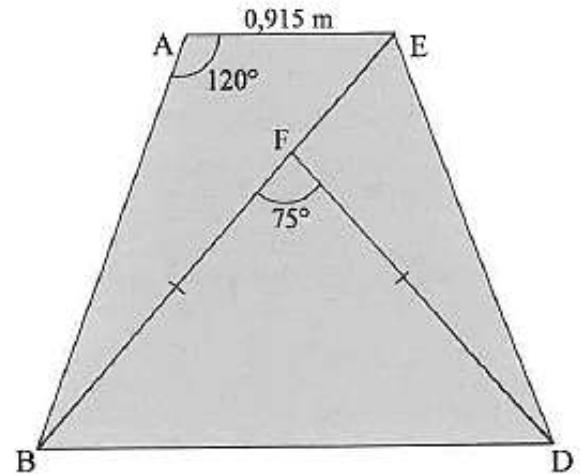
In die diagram hieronder is die grafieke van $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ en $g(x) = \sin(x - 30^\circ)$ vir die interval $x \in [-90^\circ; 240^\circ]$ geskets. A en B is onderskeidelik die y-afsnitte van f en g .



- 7.1 Bepaal die lengte van AB. (2)
- 7.2 Skryf die waardeversameling van $3f(x) + 2$ neer. (2)
- 7.3 Lees vanaf die grafieke 'n waarde van x waarvoor $g(x) - f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2)
- 7.4 Vir watter waardes van x , in die interval $x \in [-90^\circ; 240^\circ]$, is:
- 7.4.1 $f(x) \cdot g(x) > 0$ (2)
- 7.4.2 $g'(x - 5^\circ) > 0$ (2)
- [10]

VRAAG 8

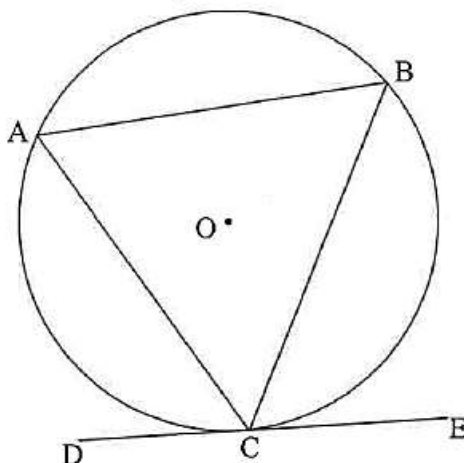
FIGUUR I toon 'n oprit wat na die ingang van 'n gebou lei. B, C en D lê op dieselfde horisontale vlak. Die loodregte hoogte (AC) van die oprit is 0,5 m en die hoogtehoek vanaf B na A is 15° . Die ingang van die gebou (AE) is 0,915 m wyd.

**FIGUUR I****FIGUUR II (boeaansig)**

- 8.1 Bereken die lengte van AB. (2)
- 8.2 Figuur II toon die boeaansig van die oprit. Die oppervlak van die bokant van die oprit word in drie driehoeke verdeel, soos in die diagram getoon.
- Indien $\angle BAE = 120^\circ$, bereken die lengte van BE. (3)
- 8.3 Bereken die oppervlakte van $\triangle BFD$ as $\angle BFD = 75^\circ$, $BF = FD$ en $BF = \frac{5}{7} BE$. (3)
- [8]

Euklidiese Meetkunde*(Mei/Junie 2024)***VRAAG 8**

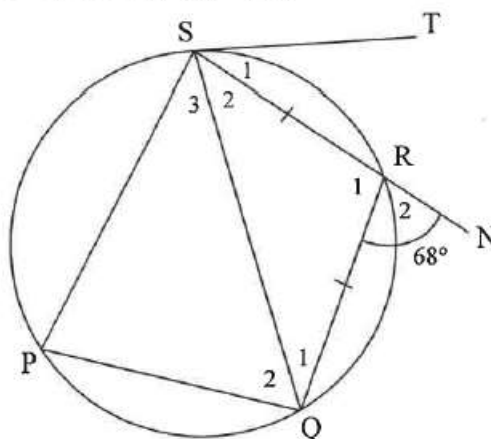
- 8.1 In die diagram is koorde AB, BC en AC getrek in die sirkel met middelpunt O. DCE is 'n raaklyn aan die sirkel by C.



Bewys die stelling wat sê dat die hoek tussen die raaklyn aan 'n sirkel en die koord getrek vanuit die raakpunt, gelyk is aan die hoek in die teenoorstaande segment, m.a.w. $\hat{BCE} = \hat{A}$.

(5)

- 8.2 In die diagram is PQRS 'n koordevierhoek met $RQ = RS$. ST is 'n raaklyn aan die sirkel by S. SR is na N verleng. $\hat{R}_2 = 68^\circ$.



Bepaal, met redes, die grootte van:

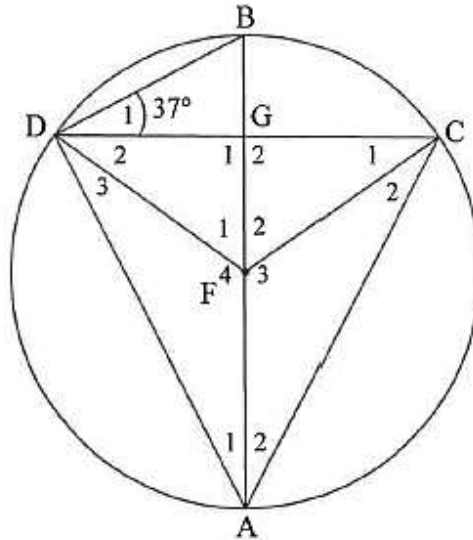
8.2.1 \hat{P} (2)

8.2.2 \hat{Q}_1 (2)

8.2.3 \hat{S}_1 (2)
[11]

VRAAG 9

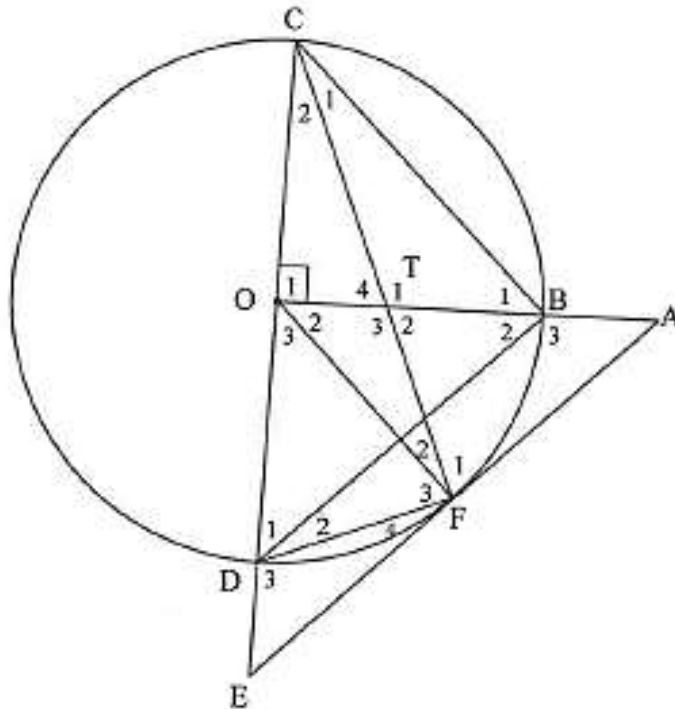
In die diagram is AB 'n middellyn van die sirkel met middelpunt F . AB en CD sny by G . FD en FC is getrek. BA halveer \widehat{CAD} en $\hat{D}_1 = 37^\circ$.



- 9.1 Bepaal, met redes, enige drie ander hoeke gelyk aan \hat{D}_1 . (4)
- 9.2 Toon dat $DG = GC$. (4)
- 9.3 Indien dit verder gegee word dat die radius van die sirkel 20 eenhede is, bereken die lengte van BG . (4)
- [12]

VRAAG 10

In die diagram is COD die middellyn van die sirkel met middelpunt O. EA is 'n raaklyn aan die sirkel by F. $AO \perp CE$. Middellyn COD is verleng om die raaklyn aan die sirkel by E te sny. OB is verleng en sny die raaklyn aan die sirkel by A. CF sny OB by T. CB, BD, OF en FD is getrek.



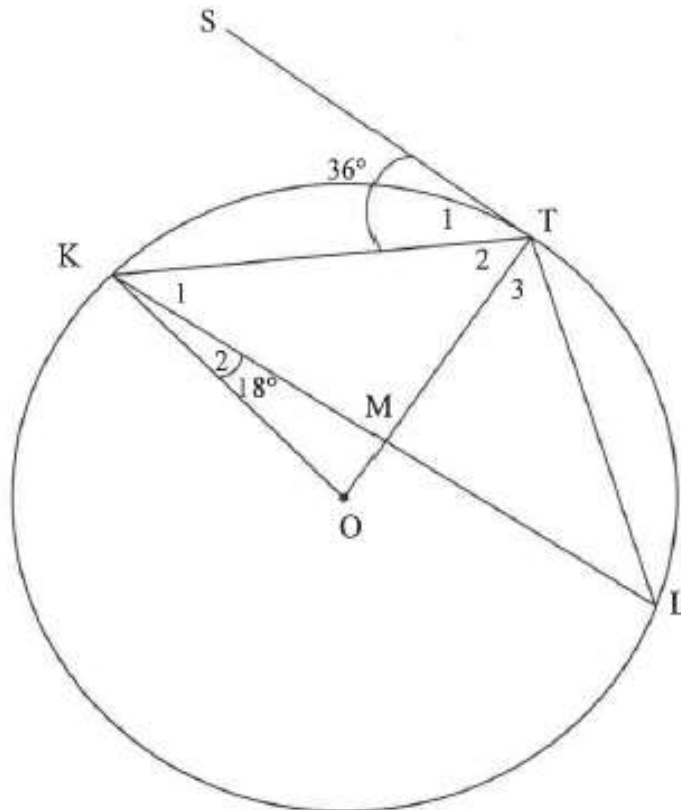
Bewys, met redes, dat:

- 10.1 TODF 'n koordevierhoek is (4)
 - 10.2 $\hat{D}_3 = \hat{T}_1$ (3)
 - 10.3 $\triangle TFO \parallel \triangle DFE$ (5)
 - 10.4 Indien $\hat{B}_2 = \hat{E}$, bewys dat $DB \parallel EA$. (2)
 - 10.5 Bewys dat $DO = \frac{TO \cdot FE}{AB}$ (5)
- [19]

(Mei/Junie 2023)

VRAAG 8

- 8.1 In die diagram is O die middelpunt van die sirkel. K , T en L is punte op die sirkel. KT , TL , KL , OK en OT is getrek. OT sny KL by M . ST is 'n raaklyn aan die sirkel by T . $\hat{S}TK = 36^\circ$ en $\hat{OKL} = 18^\circ$.



- 8.1.1 Bepaal, met redes, die grootte van:

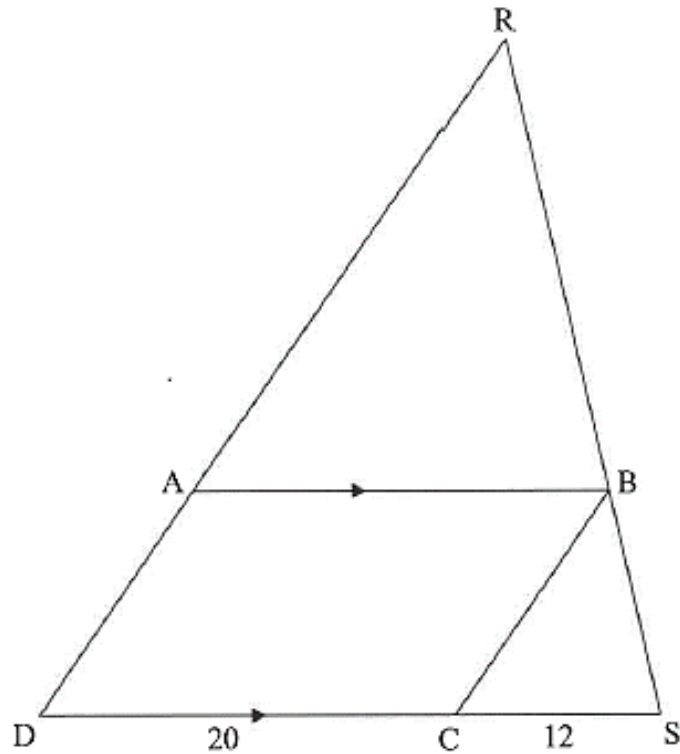
(a) \hat{T}_2 (2)

(b) \hat{L} (2)

(c) \hat{KOT} (2)

- 8.1.2 Bewys, met redes, dat $KM = ML$. (3)

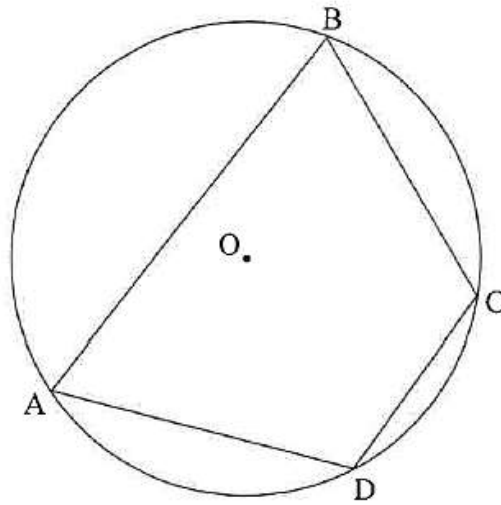
- 8.2 In die diagram is $\triangle RDS$ geskets. A, B en C is punte op RD, RS en DS onderskeidelik sodanig dat $AB \parallel DS$ en $RB : BS = 5 : 3$. $DC = 20$ eenhede en $CS = 12$ eenhede.



- 8.2.1 Bewys, met redes, dat $BC \parallel AD$. (3)
- 8.2.2 Indien daar verder gegee word dat $RD = 48$ eenhede, bereken, met redes, die waarde van die verhouding $AD : AB$. (3)
- [15]

VRAAG 9

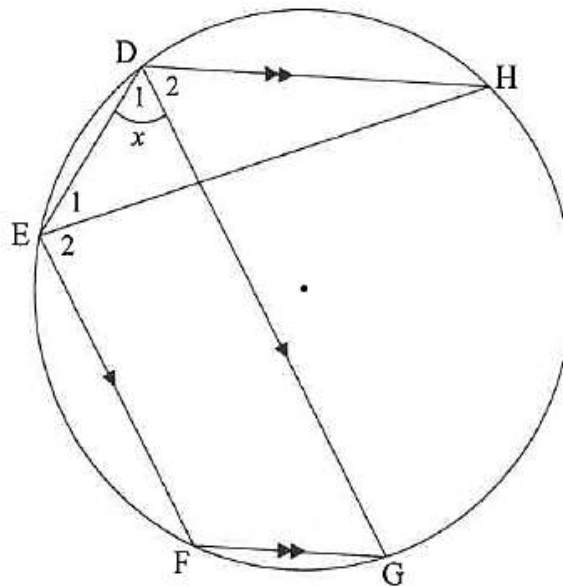
- 9.1 In die diagram is O die middelpunt van die sirkel. $ABCD$ is 'n koordevierhoek.



Gebruik die diagram in die ANTWOORDEBOEK om die stelling te bewys wat beweer dat die teenoorstaande hoeke van 'n koordevierhoek supplementêr is, met ander woorde bewys dat $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

(5)

- 9.2 In die diagram is $DEFG$ 'n koordevierhoek sodanig dat $EF \parallel DG$. H is nog 'n punt op die sirkel sodanig dat $DH \parallel FG$. Koord EH is getrek. Laat $\hat{D}_1 = x$.



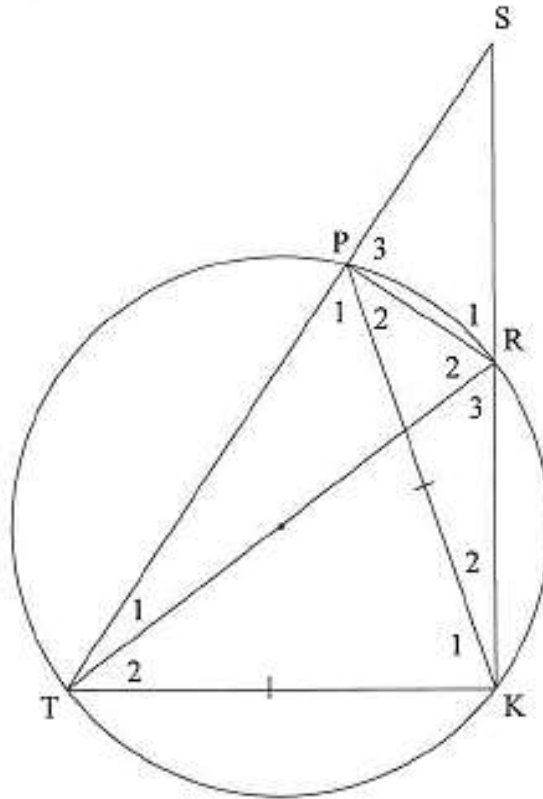
Bewys, met redes, dat $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$.

(4)

[9]

VRAAG 10

In die diagram is TR 'n middellyn van die sirkel. $PRKT$ is 'n koordevierhoek. Koorde TP en KR is verleng en sny by S . Koord PK is getrek sodanig dat $PK = TK$.



10.1 Bewys, met redes, dat:

10.1.1 SR 'n middellyn van 'n sirkel is wat deur punte S , P en R gaan (4)

10.1.2 $\hat{S} = \hat{P}_2$ (5)

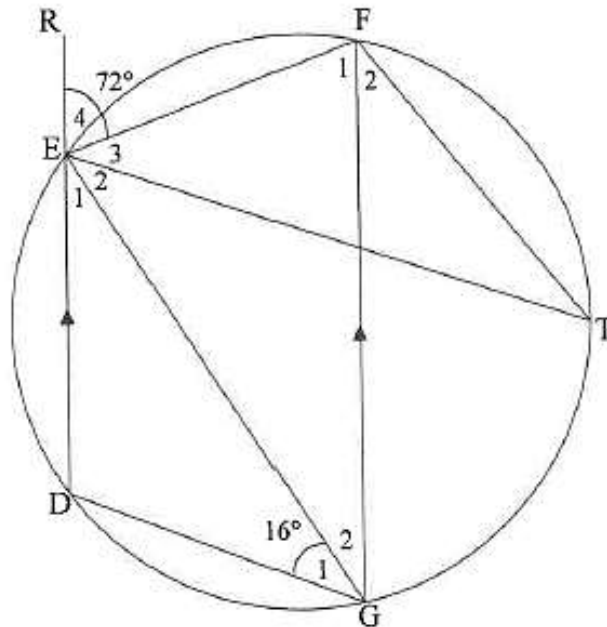
10.1.3 $\triangle SPK \parallel \triangle PRK$ (3)

10.2 Indien daar verder gegee word dat $SR = RK$, bewys dat $ST = \sqrt{6}RK$. (5)
[17]

(Mei/Junie 2022)

VRAAG 9

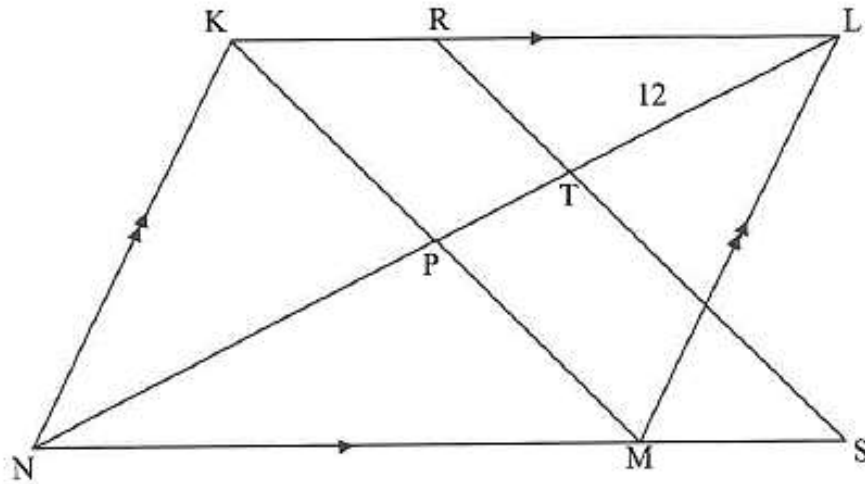
- 9.1 In die diagram is DEFG 'n koordevierhoek met $DE \parallel GF$. DE word na R verleng. T is nog 'n punt op die sirkel. EG, FT en ET word getrek. $\hat{E}_4 = 72^\circ$ en $\hat{G}_1 = 16^\circ$.



Bepaal, met redes, die grootte van die volgende hoeke:

- 9.1.1 \hat{DGF} (2)
- 9.1.2 \hat{T} (2)
- 9.1.3 \hat{GEF} (2)

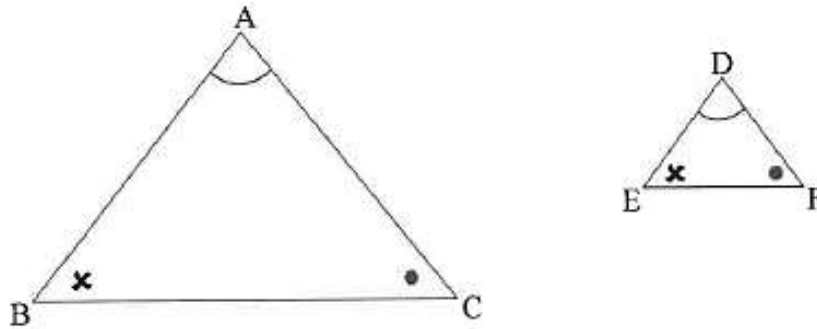
- 9.2 In die diagram sny die hoeklyne van parallelogram KLMN by P. NM is verleng na S. R is 'n punt op KL en RS sny PL by T. $NM : MS = 4 : 1$, $NL = 32$ eenhede en $TL = 12$ eenhede.



- 9.2.1 Bepaal, met redes, die waarde van die verhouding $NP : PT$ in eenvoudigste vorm. (4)
- 9.2.2 Bewys, met redes, dat $KM \parallel RS$. (2)
- 9.2.3 As $NM = 21$ eenhede, bepaal, met redes, die lengte van RL . (4)
- [16]

VRAAG 10

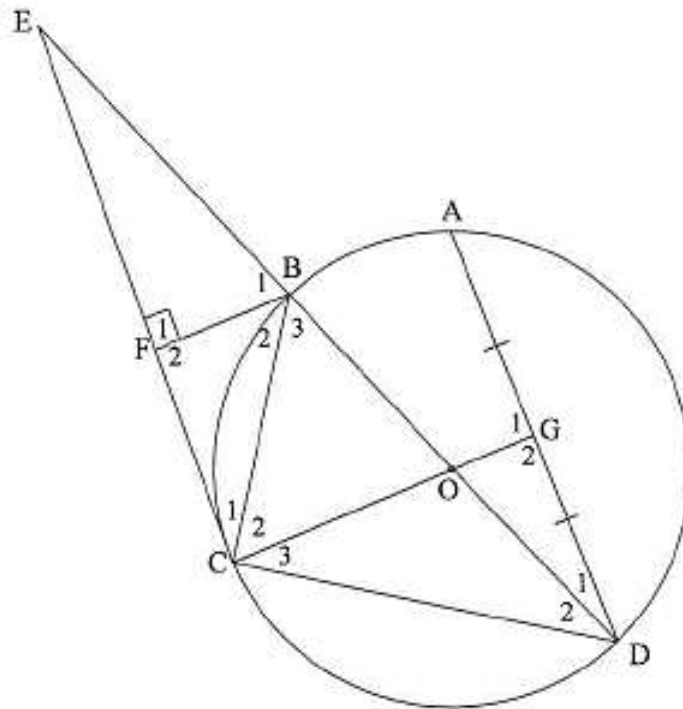
10.1 In die diagram is $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geskets sodanig dat $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ en $\hat{C} = \hat{F}$.



Gebruik die diagram in die ANTWOORDEBOEK om die stelling te bewys wat beweer dat as twee driehoeke gelykhoekig is, dan is die ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding, d.i. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

(6)

- 10.2 In die diagram is O die middelpunt van 'n sirkel wat deur A , B , C en D gaan. EC is 'n raaklyn aan die sirkel by C . Middellyn DB word verleng om die raaklyn EC by E te ontmoet. F is 'n punt op EC sodanig dat $BF \perp EC$. Radius CO word verleng om AD by G te halveer. BC en CD is getrek.



- 10.2.1 Bewys, met redes, dat:

(a) $FB \parallel CG$

(3)

(b) $\triangle FCB \parallel \triangle CDB$

(5)

- 10.2.2 Gee 'n rede waarom $\hat{G}_1 = 90^\circ$.

(1)

- 10.2.3 Bewys, met redes, dat $CD^2 = CG \cdot DB$.

(5)

- 10.2.4 Bewys vervolgens dat $DB = CG + FB$.

(5)

[25]

AFDELING 5: INLIGTINGSBLAD

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A = P(1 + ni)$$

$$A = P(1 - ni)$$

$$A = P(1 - i)^n$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$T_n = a + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; \quad r \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}; \quad -1 < r < 1$$

$$F = \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$y = mx + c$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \tan \theta$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\text{In } \triangle ABC: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\text{area } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$



AFDELING 6: BIBLIOGRAFIE

1	JENN 2024 Last Push Study Guide
2	Grade 12 Mathematics Examination Guidelines, 2021 Graad 12 Wiskunde Eksamenriglyne, 2021
3	May/June Dbe National Papers of 2022, 2023 and 2024 Mei/Junie DBE Nasionale Vraestelle van 2022, 2023 en 2024
4	November Dbe National Papers of 2022, 2023 and 2024 November DBE Nasionale Vraestelle van 2022, 2023 en 2024
5	Counting Since 2014 – Pat Tshikane
6	Bubble Gum Notes
7	www.mathsisfun.com
8	Mind The Gap Mathematics Study Guide
9	Mind Action Series Grade 11 and 12 Textbook
10	Maths Made Easy – A Comprehensive Guide to Grade 12 Mathematics
11	Maths Clinic Smart Preparation for Grade 12
12	How I teach
13	FET CAPS Document / VOO KABV Dokument
14	https://www.highermathematics.co.uk/increasing-decreasing-functions/
15	http://vassarstats.net/textbook/ch2pt1.html
16	Master Maths Notes
17	https://www.biorender.com/template/histogram-distributions